

N° D'ORDRE :

1242.

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES,

PAR M. FAYET,

Astronome-Adjoint à l'Observatoire de Paris.

1^{re} THÈSE. — RECHERCHES CONCERNANT LES EXCENTRICITÉS DES COMÈTES.

2^e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le 29 juin 1906, devant la Commission d'examen.

MM. POINCARÉ, *Président.*

KOENIGS, { *Examineurs.*
ANDOYER, }

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'OBSERVATOIRE DE PARIS,

Quai des Grands-Augustins, 55.

1906

N° D'ORDRE :

1242.

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES.

PAR M. FAYET,

Astronome-Adjoint à l'Observatoire de Paris.

1^{re} THÈSE. — RECHERCHES CONCERNANT LES EXCENTRICITÉS DES COMÈTES.

2^e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le

24 juin 1906, devant la Commission d'examen.



MM. POINCARÉ, *Président.*

KOENIGS,

ANDOYER,

{ *Examineurs.*

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'OBSERVATOIRE DE PARIS.

Quai des Grands-Augustins, 55.

1906

UNIVERSITÉ DE PARIS.

FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS.

	MM.	
DOYEN	PAUL APPELL.....	Mécanique rationnelle.
DOYEN HONORAIRE	G. DARBOUX, professeur.	Géométrie supérieure.
PROFESSEURS HONORAIRES.	TROOST, Ch. WOLF.	
	LIPPMANN.....	Physique.
	BOUTY.....	Physique.
	BOUSSINESQ.....	Physique mathématique et Calcul des probabilités.
	PICARD.....	Analyse supérieure et Algèbre supérieure.
	H. POINCARÉ.....	Astronomie mathématique et Mécanique céleste.
	YVES DELAGE.....	Zoologie, Anatomie, Physio- logie comparée.
	G. BONNIER.....	Botanique.
	DASTRE.....	Physiologie.
	DITTE.....	Chimie.
	GIARD.....	Zoologie. Évolution des êtres organisés.
	KOENIGS.....	Mécanique physique et expé- rimentale.
	VÉLAIN.....	Géographie physique.
PROFESSEURS	GOURSAT.....	Calcul différentiel et Calcul intégral.
	CHATIN.....	Histologie.
	PELLAT.....	Physique.
	HALLER.....	Chimie organique.
	H. MOISSAN.....	Chimie.
	JOANNIS.....	Chimie (Enseignem ^t P. C. N.).
	P. JANET.....	Physique Id.
	WALLERANT.....	Minéralogie.
	ANDOYER.....	Astronomie physique.
	PAINLEVÉ.....	Mathématiques générales.
	HAUG.....	Géologie.
	P. CURIE.....	Physique.
	TANNERY.....	Calcul différentiel et Calcul intégral.
	RAFFY.....	Application de l'Analyse à la Géométrie.
	HOUSSAY.....	Zoologie.
	N.....	Chimie biologique.
	N.....	Zoologie, Anatomie, Physio- logie comparée.
	PUISEUX.....	Mécanique et Astronomie.
	RIBAN.....	Chimie analytique.
	LEDUC.....	Physique.
PROFESSEURS ADJOINTS	HADAMARD.....	Calcul différentiel et intégral.
	MATRUCHOT.....	Botanique.
	MICHEL.....	Minéralogie.
	DAGUILLON.....	Botanique.
	BOUVEAULT.....	Chimie organique.
	BOREL.....	Théorie des fonctions.
SECRÉTAIRE	A. GUILLET.	

A

MONSIEUR M. LÖWY

DIRECTEUR DE L'OBSERVATOIRE DE PARIS,
MEMBRE DE L'INSTITUT ET DU BUREAU DES LONGITUDES.

A

MONSIEUR H. POINCARÉ

PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES,
MEMBRE DE L'INSTITUT ET DU BUREAU DES LONGITUDES.

Hommage respectueux et reconnaissant.

G. FAYET.



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41556022_0011

PREMIÈRE THÈSE.

RECHERCHES

CONCERNANT

LES EXCENTRICITÉS DES COMÈTES.

INTRODUCTION.

Les comètes viennent-elles des espaces interstellaires, ou convient-il, au contraire, de les considérer comme ayant toujours appartenu à notre système?

Ce problème a suscité d'assez nombreuses recherches dont les conclusions s'accordent peu : tandis que Laplace ⁽¹⁾ se prononce nettement en faveur d'une origine extra-solaire, d'autres savants éminents, parmi lesquels il faut citer Faye et Schiaparelli, ont soutenu la thèse opposée, en invoquant d'ailleurs comme principal argument l'absence de comètes à orbites fortement hyperboliques.

Dans un Mémoire important ⁽²⁾, publié il y a une dizaine d'années, M. Fabry, voulant reprendre complètement l'étude de cette question, se pose le problème que voici : quelles doivent être les lois de la distribution des divers éléments des orbites cométaires, si l'on admet que ces astres viennent des espaces interstellaires? Ces lois sont-elles bien celles qui se manifestent en réalité?

⁽¹⁾ *Sur les comètes (Connaissance des Temps de 1816).*

⁽²⁾ *Étude sur la probabilité des comètes hyperboliques et l'origine des comètes.* Thèse de Doctorat, Paris, 1893.

Mettant à profit les travaux antérieurs de Gauss ⁽¹⁾, Schiaparelli ⁽²⁾, Seeliger ⁽³⁾ et Davis ⁽⁴⁾, l'auteur, après avoir rectifié plusieurs inexactitudes du Mémoire de Laplace, montre que la discordance des résultats dans les recherches qui ont précédé n'est qu'apparente, et provient uniquement de ce que la question y était envisagée à des points de vue différents.

Il faut, dit M. Fabry, dans une telle étude, tenir compte du mouvement de translation de Soleil, et considérer principalement les comètes dont les distances périhélies ne sont pas trop considérables; on trouve alors que l'hypothèse d'une origine extra-solaire implique le caractère hyperbolique, souvent même prononcé, pour toutes les orbites cométaires. Or, ces conséquences sont en complet désaccord avec les observations; on doit donc conclure, avec M. Fabry, que les comètes sont des astres permanents de notre système.

Cependant, si l'on admet qu'aucune comète ne provient des espaces interstellaires, on doit répondre à une objection : parmi ces astres, il en existe une quinzaine pour lesquels il n'a pas été possible de représenter convenablement à l'aide d'un arc elliptique ou même parabolique toutes les positions observées; l'orbite osculatrice correspondant à la période des observations est légèrement hyperbolique. L'excentricité dépasse trop fortement l'unité pour que cet écart puisse être attribué à l'incertitude du calcul; d'ailleurs quelques-unes de ces comètes exceptionnelles figurent au nombre de celles découvertes récemment, et qui ont été observées longtemps, avec toute la précision désirable.

Une explication assez simple consiste à regarder ce caractère hyperbolique comme accidentel, en admettant qu'il résulte d'une action perturbatrice des grosses planètes (en particulier de Jupiter) sur les éléments d'une orbite antérieurement elliptique.

Cette hypothèse vient de se trouver confirmée dans des travaux récents

(¹) *Œuvres*, t. VI, p. 581.

(²) Deux Mémoires : (a). *Sulla probabilità delle orbite iperboliche per i corpi che dagli spazi stellati arrivano nell'intorno del sistema solare* (*Mém. de l'Institut Lombard*, 1873); (b). *Sul calcolo di Laplace intorno alla probabilità delle orbite cometarye iperboliche* (*Comptes rendus de l'Institut Lombard*, série 2, t. VII, et *Bull. Astronomique*, t. VII, p. 285).

(³) *Ueber die Wahrscheinlichkeit des Vorkommens von hyperbolischen Cometenbahnen* (*Astronomische Nachrichten*, n° 2968 et *Bulletin Astronomique*, t. VII, p. 219).

(⁴) *On the probable character of cometary orbits* (*Philosophical Magazine*, septembre 1870 et janvier 1871).

concernant les comètes 1890 II ⁽¹⁾ et 1892 II ⁽²⁾, deux des astres pour lesquels le caractère hyperbolique existait certainement à l'époque des observations : le calcul des perturbations a montré que l'orbite de chacune de ces comètes était une ellipse durant la période qui a précédé son entrée dans le domaine d'attraction des planètes.

Aussi a-t-il paru intéressant d'entreprendre une recherche générale du même genre, recherche comprenant non seulement les comètes trouvées hyperboliques, mais embrassant toutes celles dont l'orbite (supposée déterminée avec une exactitude suffisante) diffère très peu de la parabole : il se pourrait, en effet, qu'une orbite parabolique ou même légèrement elliptique au voisinage du passage au périhélie, ne soit qu'une orbite antérieure hyperbolique, dont les perturbations planétaires auraient diminué plus tard l'excentricité ; un tel fait constituerait, au contraire, un argument en faveur d'une origine extra-solaire.

Malheureusement, pour effectuer un tel travail, par quadratures mécaniques, avec toute la rigueur possible et en tenant compte de l'action de toutes les planètes, on viendrait se heurter à une grosse difficulté matérielle : un calculateur, même très exercé, ne pourrait achever les calculs relatifs aux 150 astres qu'il s'agit d'étudier, en moins de longues années.

Le but de la présente recherche a donc été beaucoup plus modeste : en premier lieu, on a dû se contenter d'évaluer les perturbations du premier ordre de l'excentricité (le seul élément intéressant) et, d'autre part, limiter le calcul aux perturbations produites par Jupiter.

En outre, on a eu recours aux deux simplifications suivantes :

1° On a regardé comme paraboliques les orbites des astres étudiés ; l'erreur

(1) STRÖMGREN, *Ueber Cometenbahnexcentricitäten* (*Meddelanden från Lunds astronomiska Observatorium*; nos 1 et 7).

Dans ce Mémoire, l'auteur conclut seulement que l'excentricité antérieure de la comète 1890 II était beaucoup moins supérieure à l'unité qu'à l'instant du passage au périhélie ; mais M. Fabry, dans une Note intéressante publiée aux *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences* (t. CXXXVIII, p. 335), a montré que l'on obtenait en réalité une excentricité primitive plus petite que 1 si l'on prenait quelques précautions de calcul que M. Strömgren avait négligées. M. Strömgren est d'ailleurs revenu sur la question (*Astronomische Nachrichten*, n° 4058) pour conclure dans le même sens que M. Fabry.

(2) G. FAYET, *Sur l'orbite antérieure de la comète 1892 II* (*Bulletin Astronomique*, mars 1900).

provenant de ce fait a été minime puisque l'excentricité des astres calculés est comprise entre 0,9985 et 1,0020 ;

2° Dans une partie des calculs, on a supposé l'orbite de Jupiter rigoureusement circulaire.

Il a été possible, en procédant ainsi, d'étudier près de 150 comètes et de calculer plusieurs Tables numériques destinées à faciliter les recherches analogues qui pourraient être entreprises ultérieurement.

Cette étude approchée a permis, comme on l'espérait, de constater que la grande majorité des astres examinés ne peuvent être d'origine extra-solaire. Pour le très petit nombre qui restait, le résultat de cette première approximation était douteux et un calcul plus rigoureux, comprenant l'action d'autres planètes que Jupiter, était nécessaire : cette recherche plus précise termine le travail actuel. La conclusion est que toutes les comètes apparues jusqu'ici sont des astres permanents de notre système.

Le présent Mémoire a été subdivisé en cinq Parties :

La première expose la méthode de calcul employée.

La seconde contient les résultats numériques obtenus en appliquant cette méthode approchée à toutes les comètes connues dont l'orbite diffère peu de la parabole.

La troisième donne les conclusions que l'on peut déduire des résultats précédents et indique quels sont les astres qui exigent un calcul plus exact.

Les deux dernières renferment l'étude plus approfondie des quelques comètes pour lesquelles un calcul approché n'avait pas permis de conclure d'une façon définitive, en particulier celle de la comète 1844 III.



PREMIÈRE PARTIE.

EXPOSÉ DE LA MÉTHODE.

1. — *Expression différentielle de la perturbation.*

On va rappeler brièvement le principe de la méthode dite *de la variation des éléments*, dont on fera usage dans ce qui suit.

En se conformant aux notations généralement adoptées, on considérera :

1° La perturbation S comptée suivant le rayon vecteur de la comète, et prise positivement quand ce rayon augmente ;

2° La perturbation T, évaluée sur une perpendiculaire au rayon vecteur située dans le plan de l'orbite cométaire, et supposée positive dans la direction du mouvement de la comète.

(On introduit généralement une troisième composante W perpendiculaire au plan de l'orbite, mais elle ne joue aucun rôle dans le cas actuel.)

On supposera d'abord connues les quantités S et T, dont l'expression sera donnée un peu plus loin (§ 2). La méthode de la variation des éléments consiste, comme on sait, à déterminer les perturbations de manière à pouvoir représenter, à chaque instant, la position et la vitesse de l'astre perturbé, en faisant varier les six constantes arbitraires du problème.

En désignant par $\frac{\partial R}{\partial \varpi}$, $\frac{\partial R}{\partial \varepsilon}$ les dérivées partielles de la fonction perturbatrice R par rapport aux éléments ϖ , ε , on obtient aisément les relations suivantes

$$\frac{de}{dt} = -\frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e} \left[\frac{\partial R}{\partial \varpi} + (1 - \sqrt{1-e^2}) \frac{\partial R}{\partial \varepsilon} \right] \quad (\text{Tisserand, } \textit{Traité de Mécanique céleste}, \text{ t. I, p. 169);}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial R}{\partial \varpi} &= Tr - \frac{\partial R}{\partial \varepsilon} \\ \frac{\partial R}{\partial \varepsilon} &= \frac{Sae}{\sqrt{1-e^2}} \sin \nu + \frac{Ta^2}{r} \sqrt{1-e^2} \end{aligned} \right\} \quad (\text{Tisserand, } \textit{Traité de Mécanique céleste}, \text{ t. I, p. 433 et t. IV, p. 190).}$$

d'où l'on déduit

$$\frac{de}{dt} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e} \left\{ Sae \sin \varphi + T \left[\frac{a^2}{r} (1-e^2) - r \right] \right\},$$

$$\frac{de}{dt} = \frac{1}{na^2\sqrt{1-e^2}} \left\{ Sa(1-e^2) \sin \varphi + \frac{T}{e} (1-e^2) \left[\frac{a^2}{r} (1-e^2) - r \right] \right\};$$

d'autre part, on a les relations du mouvement elliptique

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e \cos \varphi}, \quad p = a(1-e^2), \quad k\sqrt{p} = na^2\sqrt{1-e^2};$$

de sorte qu'il vient successivement

$$\frac{de}{dt} = \frac{1}{k\sqrt{p}} \left\{ pS \sin \varphi + T \left[a(1+e \cos \varphi) - r \right] \frac{1-e^2}{e} \right\},$$

$$\frac{de}{dt} = \frac{1}{k\sqrt{p}} \left[pS \sin \varphi + T \left(\frac{p-r}{e} + re + p \cos \varphi \right) \right],$$

$$\frac{de}{dt} = \frac{1}{k\sqrt{p}} [pS \sin \varphi + T(r \cos \varphi + re + p \cos \varphi)],$$

$$\frac{de}{dt} = \frac{1}{k\sqrt{p}} [pS \sin \varphi + T(r \cos \varphi + re \cos^2 \varphi + re \sin^2 \varphi + p \cos \varphi)],$$

ou enfin

$$\frac{de}{dt} = \frac{1}{k\sqrt{p}} [pS \sin \varphi + (2p \cos \varphi + re \sin^2 \varphi)T].$$

Mais, comme il a été dit que l'on ferait usage des formules du mouvement parabolique, la relation précédente se réduit à la forme plus simple

$$(1) \quad \frac{de}{dt} = \frac{2\sqrt{p}}{k} \left(S \sin \frac{\varphi}{2} + T \cos \frac{\varphi}{2} \right) \cos \frac{\varphi}{2}.$$

Remarque. — Avant de passer au calcul des composantes S et T, on rappellera comment on peut obtenir la relation fondamentale (1) par une marche différente.

En désignant par $\frac{dy_0}{dt}$ la vitesse non troublée, on peut poser

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy_0}{dt} + T;$$

mais

$$dy_0 = r_0 d\varphi_0$$

$$(r_0)^2 \frac{d\varphi_0}{dt} = k\sqrt{p_0},$$

d'où

$$r_0 \frac{d\gamma_0}{dt} = k\sqrt{p_0}.$$

Comme r et r_0 diffèrent d'un infiniment petit, on peut écrire, en négligeant le terme $(r - r_0) \frac{d\gamma_0}{dt}$,

$$r \frac{d\gamma}{dt} = r_0 \frac{d\gamma_0}{dt} + rT = k\sqrt{p};$$

on en déduit

$$\delta(\sqrt{p}) = \sqrt{p} - \sqrt{p_0} = \frac{rT}{k}$$

et

$$\delta(p) = 2\sqrt{p} \delta(\sqrt{p}) = \frac{2rT}{k} \sqrt{p}.$$

L'équation polaire donne ensuite

$$e \cos v = \frac{p}{r} - 1$$

et, par différentiation, puisque $\frac{dv}{dt} = \frac{k\sqrt{p}}{r^2}$, il vient

$$e \sin v = \frac{\sqrt{p}}{k} \frac{dr}{dt}.$$

Il est alors aisé d'en conclure, par substitution,

$$e \sin v = \frac{[\sqrt{p_0} + \delta(\sqrt{p})]}{k} \left[\frac{dr_0}{dt} + \delta\left(\frac{dr}{dt}\right) \right] = e_0 \sin v_0 + \frac{1}{k} \left[\frac{dr_0}{dt} \delta(\sqrt{p}) + \sqrt{p} \delta\left(\frac{dr}{dt}\right) \right],$$

$$e \cos v = \frac{p}{r} - 1 = \frac{p_0}{r_0} - 1 + \frac{pr_0 - p_0 r}{rr_0} = e_0 \cos v_0 + \frac{1}{r} \left[\delta(p) - \frac{p_0}{r_0} \delta(r) \right];$$

d'autre part,

$$\frac{dr}{dt} = \frac{ke}{\sqrt{p}} \sin v,$$

$$\frac{dr_0}{dt} = \frac{ke_0}{\sqrt{p_0}} \sin v_0,$$

et, d'après les hypothèses faites,

$$\delta\left(\frac{dr}{dt}\right) = 0,$$

$$(r) = 0;$$

il viendra donc avec la même approximation

$$\begin{aligned}\delta(e \sin v) &= \sin v \delta(e) + e \cos v \delta(v) = \frac{1}{k} \left(\frac{e \sin v}{\sqrt{p}} r T + \sqrt{p} S \right), \\ \delta(e \cos v) &= \cos v \delta(e) - e \sin v \delta(v) = \frac{2 T \sqrt{p}}{k},\end{aligned}$$

où $\delta(v)$ désigne uniquement la variation subie par l'anomalie vraie du seul fait de la perturbation momentanée, variation qui n'a évidemment rien de commun avec $\frac{dv}{dt} dt$.

Des deux dernières égalités il est facile de déduire

$$\delta(e) = \frac{1}{k \sqrt{p}} [p S \sin v + (2p \cos v + r e \sin^2 v) T],$$

résultat identique à celui obtenu par la première méthode.

2. — Calcul des composantes S et T.

Considérons les deux grands cercles qui sont les traces, sur la sphère céleste, des plans contenant les orbites de la planète et de la comète; puis supposons que l'on ait rapporté les éléments de la comète au plan de la planète.

Si l'on convient de choisir comme origine des longitudes, dans ce système, le périhélie B de la planète, l'orbite cométaire sera définie par les éléments :

BA = Ω , longitude du nœud ascendant;

AC = ω , argument du périhélie;

$\hat{A} = i$, inclinaison (*fig. 1*).

Fig. 1.



Soient alors, à un instant donné, M et P, les traces des rayons vecteurs des deux astres sur la sphère, et φ , V , leurs anomalies vraies.

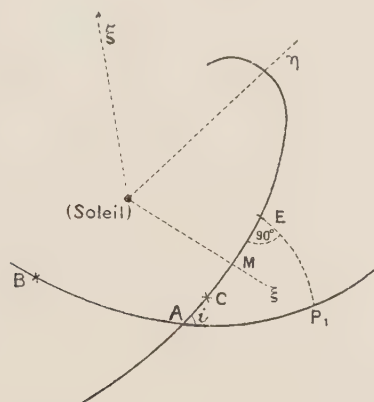
On aura d'abord

$$AP_1 = V_1 - \Omega,$$

$$AM = AC + CM = \omega + \varphi = u.$$

En menant par P, un arc de grand cercle P, E perpendiculaire à AM, puis

Fig. 2.



désignant par L_1 et B_1 les arcs AE et P, E (*fig. 2*), le triangle sphérique rectangle AEP, donne

$$(2) \quad \begin{cases} \cos B_1 \cos L_1 = \cos (V_1 - \Omega) \\ \cos B_1 \sin L_1 = \sin (V_1 - \Omega) \cos i. \end{cases}$$

On prendra ensuite, dans le plan de la comète, un système d'axes mobiles : l'un Oξ, coïncidant avec le rayon vecteur; l'autre, Oη, perpendiculaire au premier et mené dans le sens des φ croissants; puis on choisira un troisième axe Oζ formant avec les deux précédents un trièdre trirectangle positif.

Les coordonnées, dans le système Oξηζ, sont évidemment

$$(3) \quad \begin{cases} \text{Pour la comète... } \xi = r, & \eta = 0, & \zeta = 0, \\ \text{Pour la planète... } \xi_1 = r_1 \cos B_1 \cos (L_1 - u), & \eta_1 = r_1 \cos B_1 \sin (L_1 - u), & \zeta_1 = -r_1 \sin B_1, \end{cases}$$

où r et r_1 représentent les rayons vecteurs des deux astres.

On sait, d'autre part, que, dans le cas simple où il existe une force troublante

unique, la force perturbatrice a pour composantes respectives

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} S = k^2 m_1 \left(\frac{\xi_1 - \zeta}{\rho^3} - \frac{\xi_1}{r_1^3} \right) \\ T = k^2 m_1 \left(\frac{\eta_1 - \eta}{\rho^3} - \frac{\eta_1}{r_1^3} \right) \\ W = k^2 m_1 \left(\frac{\zeta_1 - \zeta}{\rho^3} - \frac{\zeta_1}{r_1^3} \right) \end{array} \right\} \quad (\text{TISSERAND, } \textit{Traité de Mécanique céleste}, \\ \text{t. IV, p. 192),}$$

ρ désignant la distance mutuelle des deux astres.

Actuellement, ces formules se simplifient à cause de (3) et donnent

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} S = k^2 m_1 \left(\frac{\xi_1 - r}{\rho^3} - \frac{\xi_1}{r_1^3} \right), \\ T = k^2 m_1 \eta_1 \left(\frac{1}{\rho^3} - \frac{1}{r_1^3} \right). \end{array} \right.$$

Si l'on substitue alors dans la relation (1), on trouve

$$de = 2 k m_1 \sqrt{\rho} \cos \frac{\varphi}{2} \left[- \frac{\xi_1 \sin \frac{\varphi}{2} + \eta_1 \cos \frac{\varphi}{2}}{r_1^3} + \frac{(\xi_1 - r) \sin \frac{\varphi}{2} + \eta_1 \cos \frac{\varphi}{2}}{\rho^3} \right] dt.$$

En convenant de poser

$$\begin{aligned} (de)_1 &= - 2 k m_1 \sqrt{\rho} \cos \frac{\varphi}{2} \frac{\xi_1 \sin \frac{\varphi}{2} + \eta_1 \cos \frac{\varphi}{2}}{r_1^3} dt, \\ (de)_2 &= 2 k m_1 \sqrt{\rho} \cos \frac{\varphi}{2} \frac{(\xi_1 - r) \sin \frac{\varphi}{2} + \eta_1 \cos \frac{\varphi}{2}}{\rho^3} dt; \end{aligned}$$

il vient

$$de = (de)_1 + (de)_2.$$

On va chercher à évaluer séparément l'effet dû à chacun de ces deux termes, en commençant par l'étude du terme indépendant de ρ , étude qui est notablement plus simple que celle de $(de)_2$.

3. — Étude du terme qui dépend de $(de)_1$.

Si l'on part de l'expression donnée plus haut pour $(de)_1$, et si l'on transforme le second membre en tenant compte de (3), il vient successivement

$$\xi_1 \sin \frac{\varphi}{2} + \eta_1 \cos \frac{\varphi}{2} = r_1 \cos B_1 \sin \left(L_1 - \omega - \frac{\varphi}{2} \right)$$

et

$$2 \cos \frac{\nu}{2} \left(\xi_1 \sin \frac{\nu}{2} + \eta_1 \cos \frac{\nu}{2} \right) = r_1 \cos B_1 [\sin (L_1 - \omega) + \sin (L_1 - \omega - \nu)],$$

puis, en vertu des relations

$$\begin{aligned} \cos B_1 \cos L_1 &= \cos (V_1 - \Omega), \\ \cos B_1 \sin L_1 &= \sin (V_1 - \Omega) \cos i, \end{aligned}$$

on a

$$\begin{aligned} 2 \cos \frac{\nu}{2} \left(\xi_1 \sin \frac{\nu}{2} + \eta_1 \cos \frac{\nu}{2} \right) &= r_1 [\sin (V_1 - \Omega) \cos \omega \cos i - \cos (V_1 - \Omega) \sin \omega] (1 + \cos \nu) \\ &\quad - r_1 \sin \nu [\cos (V_1 - \Omega) \cos \omega + \sin (V_1 - \Omega) \sin \omega \cos i], \end{aligned}$$

ou, en remarquant que $1 + \cos \nu = \frac{p}{r}$,

$$\begin{aligned} (6) \quad (de)_1 &= \frac{km_1 \sqrt{p}}{r_1^2} [\cos (V_1 - \Omega) \cos \omega + \sin (V_1 - \Omega) \sin \omega \cos i] \sin \nu dt \\ &\quad - \frac{km_1 \sqrt{p}}{r_1^2} [\sin (V_1 - \Omega) \cos \omega \cos i - \cos (V_1 - \Omega) \sin \omega] \frac{p}{r} dt. \end{aligned}$$

Le calcul de $(de)_1$ serait désormais plus rapide si l'on négligeait l'excentricité e_1 de la planète; cependant il a paru préférable de tenir compte des termes du premier ordre par rapport à cette quantité.

A cet effet, on appellera a_1 le demi-grand axe de la planète et ζ_1 son anomalie moyenne.

On a, en négligeant les termes en e_1 d'ordre supérieur au premier,

$$(7) \quad \left\{ \begin{aligned} r_1 &= a_1 (1 - e_1 \cos \zeta_1), \\ V_1 &= \zeta_1 + 2e_1 \sin \zeta_1, \\ V_1 - \Omega &= \zeta_1 - \Omega + 2e_1 \sin \zeta_1, \\ \cos (V_1 - \Omega) &= \cos (\zeta_1 - \Omega) - 2e_1 \sin \zeta_1 \sin (\zeta_1 - \Omega), \\ \sin (V_1 - \Omega) &= \sin (\zeta_1 - \Omega) + 2e_1 \sin \zeta_1 \cos (\zeta_1 - \Omega), \\ &\text{puis} \\ \frac{\cos (V_1 - \Omega)}{r_1^2} &= \frac{1}{a_1^2} [\cos (\zeta_1 - \Omega) + 2e_1 \cos (2\zeta_1 - \Omega)], \\ \frac{\sin (V_1 - \Omega)}{r_1^2} &= \frac{1}{a_1^2} [\sin (\zeta_1 - \Omega) + 2e_1 \sin (2\zeta_1 - \Omega)]. \end{aligned} \right.$$

Désignant par ζ_0 la valeur de ζ_1 pour l'époque $t = 0$ qui correspond au passage de la comète au périhélie; par n_1 le moyen mouvement de la planète, et

écrivait

$$\begin{aligned}\zeta_0 - \Omega &= z_0, \\ 2\zeta_0 - \Omega &= z_0 + \zeta_0 = h_0;\end{aligned}$$

il viendra

$$(8) \quad \begin{cases} \frac{\cos(V_1 - \Omega)}{r_1^2} = \frac{1}{a_1^2} [\cos(z_0 + nt) + 2e_1 \cos(h_0 + 2nt)], \\ \frac{\sin(V_1 - \Omega)}{r_1^2} = \frac{1}{a_1^2} [\sin(z_0 + nt) + 2e_1 \sin(h_0 + 2nt)]. \end{cases}$$

Introduisons maintenant une fonction f , dont nous donnons plus loin une Table (Table I), et qui sera définie par la relation

$$f(\alpha, \beta, i) \quad \text{ou plutôt} \quad f(\alpha, \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \cos i.$$

En posant $P = \frac{km_1 \sqrt{p}}{a_1^2}$, et en tenant compte de (8), on pourra écrire la relation (6) comme il suit :

$$\begin{aligned} \frac{(de)_1}{P dt} &= f(z_0, \omega) \sin \nu \cos n_1 t + f\left(z_0 + \frac{\pi}{2}, \omega\right) \sin \nu \sin n_1 t \\ &\quad - \frac{P}{r} f\left(z_0, \omega + \frac{\pi}{2}\right) \cos n_1 t - \frac{P}{r} f\left(z_0 + \frac{\pi}{2}, \omega + \frac{\pi}{2}\right) \sin n_1 t \\ &\quad + 2e_1 \left[f(h_0, \omega) \sin \nu \cos 2n_1 t + f\left(h_0 + \frac{\pi}{2}, \omega\right) \sin \nu \sin 2n_1 t \right. \\ &\quad \left. - \frac{P}{r} f\left(h_0, \omega + \frac{\pi}{2}\right) \cos 2n_1 t - \frac{P}{r} f\left(h_0 + \frac{\pi}{2}, \omega + \frac{\pi}{2}\right) \sin 2n_1 t \right]. \end{aligned}$$

Pour abréger l'écriture, posons avant d'aller plus loin,

$$\begin{aligned} A_0 &= f(z_0, \omega) &= \cos z_0 \cos \omega + \sin z_0 \sin \omega \cos i, \\ B_0 &= f\left(z_0, \omega + \frac{\pi}{2}\right) &= -\cos z_0 \sin \omega + \sin z_0 \cos \omega \cos i, \\ C_0 &= f\left(z_0 + \frac{\pi}{2}, \omega\right) &= -\sin z_0 \cos \omega + \cos z_0 \sin \omega \cos i, \\ D_0 &= f\left(z_0 + \frac{\pi}{2}, \omega + \frac{\pi}{2}\right) &= \sin z_0 \sin \omega + \cos z_0 \cos \omega \cos i; \end{aligned}$$

avec la vérification

$$A_0 D_0 - B_0 C_0 = \cos i,$$

et, de même,

$$\begin{aligned} A'_0 &= f(h_0, \omega), \\ B'_0 &= f\left(h_0, \omega + \frac{\pi}{2}\right), \\ C'_0 &= f\left(h_0 + \frac{\pi}{2}, \omega\right), \\ D'_0 &= f\left(h_0 + \frac{\pi}{2}, \omega + \frac{\pi}{2}\right); \end{aligned}$$

avec la vérification analogue

$$A'_0 D'_0 - B'_0 C'_0 = \cos i.$$

De sorte qu'il viendra, plus simplement,

$$\begin{aligned} \frac{(de)_1}{P \frac{dt}{dt}} &= A_0 \sin \nu \cos n_1 t + C_0 \sin \nu \sin n_1 t - B_0 \frac{P}{r} \cos n_1 t - D_0 \frac{P}{r} \sin n_1 t \\ &+ 2e_1 \left(A'_0 \sin \nu \cos 2n_1 t + C'_0 \sin \nu \sin 2n_1 t - B'_0 \frac{P}{r} \cos 2n_1 t - D'_0 \frac{P}{r} \sin 2n_1 t \right). \end{aligned}$$

L'effet $\Delta_1(e)$, dû à $(dc)_1$ depuis une époque très reculée jusqu'à l'époque du passage au périhélie, pourra donc être représenté sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} (9) \quad \frac{\Delta_1(e)}{P} &= A_0 \int_{-\infty}^0 \sin \nu \cos(n_1 t) dt + C_0 \int_{-\infty}^0 \sin \nu \sin(n_1 t) dt \\ &- B_0 \int_{-\infty}^0 \frac{P}{r} \cos(n_1 t) dt - D_0 \int_{-\infty}^0 \frac{P}{r} \sin(n_1 t) dt \\ &+ 2e_1 \left[A'_0 \int_{-\infty}^0 \sin \nu \cos(2n_1 t) dt + C'_0 \int_{-\infty}^0 \sin \nu \sin(2n_1 t) dt \right. \\ &\quad \left. - B'_0 \int_{-\infty}^0 \frac{P}{r} \cos(2n_1 t) dt - D'_0 \int_{-\infty}^0 \frac{P}{r} \sin(2n_1 t) dt \right]. \end{aligned}$$

Avant de s'occuper des intégrales qui figurent dans le second membre de cette dernière expression, il a semblé utile de montrer qu'elles ont un sens : cela se voit sans peine pour celles qui ont r en dénominateur; les autres rentrent dans la forme

$$\int_{-\infty}^0 \sin \nu \sin(gt + \beta) dt.$$

Or, l'intégration par parties donne

$$\int_{-\infty}^0 \sin \nu \sin(gt + \beta) dt = - \left| \frac{\sin \nu}{g} \cos(gt + \beta) \right|_{-\infty}^0 + \frac{1}{g} \int_{-\infty}^0 \cos \nu \cos(gt + \beta) \frac{d\nu}{dt} dt,$$

mais le terme intégré est nul aux deux limites à cause de la présence du facteur $\sin \varphi$, et l'on a, en outre,

$$r^2 \frac{d\varphi}{dt} = k\sqrt{p}, \quad \cos \varphi = \frac{p}{r} - 1,$$

de sorte que

$$\int_{-\infty}^0 \sin \varphi \sin(gt + \beta) dt = \frac{k\sqrt{p}}{g} \int_{-\infty}^0 \left(\frac{p}{r^3} - \frac{1}{r^2} \right) \cos(gt + \beta) dt,$$

et, par conséquent, les intégrales en question ne sont ni infinies, ni indéterminées; cherchons à les évaluer.

Soit d'abord

$$\tan \frac{\varphi}{2} = y;$$

d'où les relations élémentaires :

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sin \varphi = \frac{2y}{1+y^2}, \\ \frac{p}{r} = \frac{2}{1+y^2}, \\ dt = \frac{p^2(1+y^2) dy}{2k\sqrt{p}}, \\ t = \frac{\sqrt{2}q^{\frac{3}{2}}}{k} \left[y + \frac{y^3}{3} \right], \\ n_1^2 a_1^3 = k^2(1+m_1), \\ n_1 = \frac{k}{a_1^{\frac{3}{2}}} (1+m_1)^{\frac{1}{2}} = \frac{k}{a_1^2} \chi \quad \text{où} \quad \chi = (1+m_1)^{\frac{1}{2}}. \end{array} \right.$$

Il est aisé d'en conclure

$$(11) \quad \left\{ \begin{array}{l} P \sin \varphi dt = \frac{p^2 m_1}{a_1^2} y dy, \\ \frac{Pp}{r} dt = \frac{p^2 m_1}{a_1^2} dy, \\ n_1 t = \chi \sqrt{2} \left(\frac{q}{a_1} \right)^{\frac{3}{2}} \left(y + \frac{y^3}{3} \right). \end{array} \right.$$

Pour ne pas trop compliquer l'écriture dans ce qui va suivre, on posera

$$\lambda = \frac{q}{a_1} \sqrt[3]{6} \chi^{\frac{3}{2}}, \quad \nu = \lambda \sqrt[3]{4},$$

puis on effectuera les deux changements de variables successifs que voici :

$$1^{\circ} \quad y = \sqrt{\frac{3}{\lambda}} \alpha;$$

d'où il résulte

$$n_1 t = \lambda \alpha + \alpha^3,$$

$$dy = \sqrt{\frac{3}{\lambda}} d\alpha,$$

$$y dy = \frac{3}{\lambda} \alpha d\alpha,$$

$$P \sin v dt = \frac{p^2 m_1}{a_1^2} \frac{3}{\lambda} \alpha d\alpha,$$

$$P \frac{p}{r} dt = \frac{p^2 m_1}{a_1^2} \sqrt{\frac{3}{\lambda}} d\alpha.$$

2° Puis

$$\alpha = \frac{x}{\sqrt[3]{2}},$$

ce qui donne

$$2 n_1 t = v x + x^3,$$

$$P \sin v dt = \frac{p^2 m_1}{a_1^2} \frac{3}{v} x dx,$$

$$P \frac{p}{r} dt = \frac{p^2 m_1}{a_1^2} \sqrt{\frac{3}{v}} dx.$$

En écrivant alors

$$(12) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Phi_0(\mu) = \int_{-\infty}^0 \cos(x^3 + \mu x) dx, \\ \Psi_0(\mu) = \int_{-\infty}^0 \sin(x^3 + \mu x) dx, \\ \Phi_1(\mu) = \int_{-\infty}^0 x \cos(x^3 + \mu x) dx, \\ \Psi_1(\mu) = \int_{-\infty}^0 x \sin(x^3 + \mu x) dx, \end{array} \right.$$

et

$$\frac{3 p^2 m_1}{\lambda a_1^2} = \approx, \quad - \frac{p^2 m_1}{a_1^2} \sqrt{\frac{3}{\lambda}} = \kappa.$$

On aura finalement réduit $\Delta_1(e)$ à la forme

$$\begin{aligned} \Delta_1(e) = & \approx [A_0 \Phi_1(\lambda) + C_0 \Psi_1(\lambda)] + \kappa [B_0 \Phi_0(\lambda) + D_0 \Psi_0(\lambda)] \\ & + e_1 \left\{ \sqrt[3]{2} \approx [A'_0 \Phi_1(v) + C'_0 \Psi_1(v)] + \sqrt[3]{4} \kappa [B'_0 \Phi_0(v) + D'_0 \Psi_0(v)] \right\}. \end{aligned}$$

Le second membre dépend ainsi, en premier lieu, des coefficients $A_0, B_0, \dots, D'_0$ qui sont fonctions des données $\omega, i, \Omega, \zeta_0$ et sont fournis par la Table I, sur laquelle on reviendra un peu plus loin (§ 6). Il renferme ensuite huit intégrales définies.

Le Chapitre suivant sera consacré à établir de quelle façon on peut obtenir très rapidement, dans chaque cas particulier, leur expression numérique, mais il est déjà facile de se rendre compte que, pour une planète perturbatrice donnée, comme c'est ici le cas, ces intégrales dépendent uniquement de la distance périhélic q de la comète étudiée; aussi en a-t-on profité pour construire une Table (Table II) qui rend le calcul immédiat dans le cas de Jupiter.

Voici quelques explications concernant la construction de cette Table auxiliaire :

En adoptant les données fournies par la *Connaissance des Temps*, on a obtenu, quand la planète perturbatrice est Jupiter, les valeurs numériques qui suivent :

$$\begin{aligned}\varpi &= [2,39680]q, \\ \kappa &= [1,93041_n]q^{\frac{3}{2}}, \\ e_1\sqrt[3]{2}\varpi &= [1,18065]q, \\ e_1\sqrt[3]{4}\kappa &= [0,81460_n]q^{\frac{3}{2}}.\end{aligned}$$

Partant alors de ces résultats, on a calculé, pour toutes les valeurs de q (de 0,01 en 0,01, jusqu'à $q = 2,5$), les quatre quantités précédentes et les huit intégrales qui figurent dans l'expression de $\Delta_1(e)$.

Ces quantités ont ensuite servi pour former la Table II, où l'on trouve, pour toutes les valeurs de q , les valeurs numériques des expressions suivantes (ou leurs logarithmes quand l'interpolation en a paru plus commode),

$$\begin{aligned}a_0 &= \varpi \Phi_1(\lambda), \\ b_0 &= \kappa \Phi_0(\lambda), \\ c_0 &= \varpi \Psi_1(\lambda), \\ d_0 &= \kappa \Psi_0(\lambda), \\ a'_0 &= e_1\sqrt[3]{2}\varpi \Phi_1(\nu), \\ b'_0 &= e_1\sqrt[3]{4}\kappa \Phi_0(\nu), \\ c'_0 &= e_1\sqrt[3]{2}\varpi \Psi_1(\nu), \\ d'_0 &= e_1\sqrt[3]{4}\kappa \Psi_0(\nu).\end{aligned}$$

En résumé,

$$\Delta_1(e) = \int_{-\infty}^0 (de)_1$$

est ramené à la forme linéaire

$$(13) \quad \Delta_1(e) = a_0 A_0 + b_0 B_0 + c_0 C_0 + d_0 D_0 + a'_0 A'_0 + b'_0 B'_0 + c'_0 C'_0 + d'_0 D'_0,$$

dans laquelle $A_0, B_0, \dots, D'_0$ sont fournis par la Table I (p. 120);
et $a_0, b_0, c_0, \dots, d'_0$ par la Table II (p. 128).

D'ailleurs on pourrait se limiter aux quatre premiers termes, si l'on désirait négliger complètement l'excentricité e_1 de la planète.

Dans le cas d'une autre planète perturbatrice, il suffirait de calculer une Table analogue à la Table II.

4. — Calcul des intégrales Φ et Ψ .

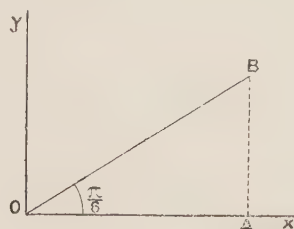
Il s'agit d'évaluer les quatre intégrales définies

$$\begin{aligned} \Phi_0(\mu) &= \int_{-\infty}^0 \cos(x^3 + \mu x) dx, & \Psi_0(\mu) &= \int_{-\infty}^0 \sin(x^3 + \mu x) dx, \\ \Phi_1(\mu) &= \int_{-\infty}^0 x \cos(x^3 + \mu x) dx, & \Psi_1(\mu) &= \int_{-\infty}^0 x \sin(x^3 + \mu x) dx. \end{aligned}$$

Pour cela, on cherchera à les exprimer à l'aide de développements en série très convergents et procédant suivant les puissances de μ .

Soient, dans le plan de la variable complexe $z = x + iy$ (*fig. 3*) le contour fermé OABO, où l'angle AOB est égal à $\frac{\pi}{6}$, et OA de longueur R;

Fig. 3.



puis l'intégrale curviligne

$$\int_{(OABO)} e^{-z^3 - \alpha z} dz,$$

qui est nulle, comme l'on sait.

F.

Cette intégrale peut se subdiviser en les trois intégrales rectilignes suivantes :

- 1° Une intégrale, prise le long de OA, égale à $\int_0^R e^{-x^3 - \alpha x} dx$;
- 2° Une intégrale, prise le long de AB, égale à $\int_0^{\frac{R}{\sqrt[3]{3}}} e^{-(R+iy)^3 - \alpha(R+iy)} i dy$;
- 3° Une intégrale, prise le long de OB, égale à $-\int_0^{\frac{2R}{\sqrt[3]{3}}} e^{-i\rho^3 - \alpha e^{\frac{i\pi}{6}} \rho} e^{\frac{i\pi}{6}} d\rho$.

Or, la seconde tend vers zéro quand R tend vers l'infini, de sorte qu'il reste

$$(14) \quad \int_0^\infty e^{-x^3 - \alpha x} dx = e^{\frac{i\pi}{6}} \int_0^\infty e^{-i\rho^3 - \alpha e^{\frac{i\pi}{6}} \rho} d\rho.$$

Si l'on pose

$$\alpha = \mu e^{\frac{2i\pi}{6}} = \mu e^{\frac{i\pi}{3}};$$

il en résultera

$$(15) \quad e^{-\frac{i\pi}{6}} \int_0^\infty e^{-x^3 - \mu e^{\frac{i\pi}{3}} x} dx = \int_0^\infty e^{-i\rho^3 - i\mu \rho} d\rho.$$

On fera ensuite la transformation

$$x^3 = u;$$

d'où

$$x = u^{\frac{1}{3}},$$

$$dx = \frac{1}{3} u^{-\frac{2}{3}} du,$$

$$\int_0^\infty e^{-x^3 - \mu e^{\frac{i\pi}{3}} x} dx = \frac{1}{3} \int_0^\infty e^{-u - \mu e^{\frac{i\pi}{3}} u^{\frac{1}{3}}} u^{-\frac{2}{3}} du;$$

ou encore

$$(16) \quad \int_0^\infty e^{-x^3 - \mu e^{\frac{i\pi}{3}} x} dx = \frac{1}{3} \int_0^\infty e^{-\mu e^{\frac{i\pi}{3}} u^{\frac{1}{3}}} (e^{-u} u^{-\frac{2}{3}}) du.$$

Le développement de l'exponentielle $e^{-\mu e^{\frac{i\pi}{3}} u^{\frac{1}{3}}}$ donnera

$$1 - \frac{\mu e^{\frac{i\pi}{3}} u^{\frac{1}{3}}}{1!} + \frac{\mu^2 e^{\frac{2i\pi}{3}} u^{\frac{2}{3}}}{2!} - \frac{\mu^3 e^{\frac{3i\pi}{3}} u}{3!} + \dots,$$

de sorte qu'en substituant dans (16), on obtiendra la relation suivante :

$$\begin{aligned} 3 \int_0^\infty e^{-x^3 - \mu e^{\frac{i\pi}{3}} x} dx &= \int_0^\infty e^{-u} u^{-\frac{2}{3}} du \\ &\quad - \frac{\mu e^{\frac{i\pi}{3}}}{1!} \int_0^\infty e^{-u} u^{-\frac{1}{3}} du \\ &\quad + \frac{\mu^2 e^{\frac{2i\pi}{3}}}{2!} \int_0^\infty e^{-u} du \\ &\quad - \frac{\mu^3 e^{\frac{3i\pi}{3}}}{3!} \int_0^\infty e^{-u} u^{\frac{1}{3}} du \\ &\quad + \dots\dots\dots; \end{aligned}$$

mais, d'après la définition de l'intégrale eulérienne de première espèce, on a

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty u^{n-1} e^{-u} du.$$

La relation précédente pourra donc s'écrire

$$\begin{aligned} 3 \int_0^\infty e^{-x^3 - \mu e^{\frac{i\pi}{3}} x} dx &= \Gamma\left(\frac{1}{3}\right) - \frac{\mu e^{\frac{i\pi}{3}}}{1!} \Gamma\left(\frac{2}{3}\right) \\ &\quad + \frac{\mu^2 e^{\frac{2i\pi}{3}}}{2!} \Gamma(1) - \frac{\mu^3 e^{\frac{3i\pi}{3}}}{3!} \Gamma\left(\frac{4}{3}\right) + \dots \\ &\quad + \frac{(-1)^j e^{\frac{ji\pi}{3}}}{j!} \Gamma\left(\frac{j+1}{3}\right) + \dots \end{aligned}$$

D'autre part, on a

$$\Gamma(p+1) = p \Gamma(p);$$

il en résultera, par un groupement convenable des termes,

$$\begin{aligned} 3 \int_0^\infty e^{-x^3 - \mu e^{\frac{i\pi}{3}} x} dx &= \Gamma\left(\frac{1}{3}\right) \left(1 - \frac{1}{3} \frac{\mu^3}{3!} e^{i\pi} + \frac{1}{3} \frac{4}{3} \frac{\mu^6}{6!} e^{2i\pi} - \frac{1}{3} \frac{4}{3} \frac{7}{3} \frac{\mu^9}{9!} e^{3i\pi} + \dots\right) \\ &\quad - \Gamma\left(\frac{2}{3}\right) \left(\frac{\mu}{1!} e^{\frac{i\pi}{3}} - \frac{2}{3} \frac{\mu^4}{4!} e^{\frac{4i\pi}{3}} + \frac{2}{3} \frac{5}{3} \frac{\mu^7}{7!} e^{\frac{7i\pi}{3}} - \dots\right) \\ &\quad + \left(\frac{\mu^2}{2!} e^{\frac{2i\pi}{3}} - 1! \frac{\mu^5}{5!} e^{\frac{5i\pi}{3}} + 2! \frac{\mu^8}{8!} e^{\frac{8i\pi}{3}} - \dots\right). \end{aligned}$$

Partant dès lors de la formule

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

et égalant, dans (15), les parties réelles et les parties imaginaires, on

déduira

$$\begin{aligned}\Phi_0 = \int_{-\infty}^0 \cos(\rho^3 + \mu\rho) d\rho &= -\frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{3} \cos \frac{\pi}{6} \left(1 + \frac{1}{3} \frac{\mu^3}{3!} + \frac{1}{3} \frac{4}{3} \frac{\mu^6}{6!} + \dots\right) \\ &\quad - \frac{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}{3} \cos \frac{\pi}{6} \left(\frac{\mu}{1!} + \frac{2}{3} \frac{\mu^4}{4!} + \frac{2}{3} \frac{5}{3} \frac{\mu^7}{7!} + \dots\right),\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\Psi_0 = \int_{-\infty}^0 \sin(\rho^3 + \mu\rho) d\rho &= -\frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{3} \sin \frac{\pi}{6} \left(1 + \frac{1}{3} \frac{\mu^3}{3!} + \frac{1}{3} \frac{4}{3} \frac{\mu^6}{6!} + \dots\right) \\ &\quad - \frac{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}{3} \sin \frac{\pi}{6} \left(\frac{\mu}{1!} + \frac{2}{3} \frac{\mu^4}{4!} + \frac{2}{3} \frac{5}{3} \frac{\mu^7}{7!} + \dots\right) \\ &\quad + \frac{1}{3} \left(\frac{\mu^2}{2!} + 1! \frac{\mu^5}{5!} + 2! \frac{\mu^8}{8!} + \dots\right).\end{aligned}$$

Afin d'abréger l'écriture, on introduira le système de notations suivant :

$$\begin{aligned}\Gamma\left(\frac{4}{3}\right) &= -\frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{3} = V, \\ \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{5}{3}\right) &= -\frac{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}{3} = W; \\ g(\mu) &= 1 + \frac{1}{3} \frac{\mu^3}{3!} + \frac{1}{3} \frac{4}{3} \frac{\mu^6}{6!} + \frac{1}{3} \frac{4}{3} \frac{7}{3} \frac{\mu^9}{9!} + \dots, \\ h(\mu) &= \frac{\mu}{1!} + \frac{2}{3} \frac{\mu^4}{4!} + \frac{2}{3} \frac{5}{3} \frac{\mu^7}{7!} + \dots, \\ \theta(\mu) &= \frac{\mu^2}{2!} + 1! \frac{\mu^5}{5!} + 2! \frac{\mu^8}{8!} + \dots,\end{aligned}$$

les relations ci-dessus s'écriront alors plus simplement

$$(17) \quad \begin{cases} \Phi_0 = \frac{\sqrt{3}}{2} (Vg - Wh), \\ \Psi_0 = -\frac{1}{2} (Vg + Wh) + \frac{\theta}{3}. \end{cases}$$

On en déduit immédiatement, à l'aide d'une différentiation par rapport au paramètre μ ,

$$(18) \quad \begin{cases} \Phi_1 = \frac{d\Psi_0}{d\mu} = -\frac{1}{2} \left(V \frac{dg}{d\mu} + W \frac{dh}{d\mu} \right) + \frac{1}{3} \frac{d\theta}{d\mu}, \\ \Psi_1 = -\frac{d\Phi_0}{d\mu} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \left(V \frac{dg}{d\mu} - W \frac{dh}{d\mu} \right). \end{cases}$$

Les deux groupes de formules (17) et (18) résolvent ainsi la question proposée.

Le calcul numérique est très rapide : tout d'abord, la Table des fonctions Γ que l'on trouve dans les *Exercices de calcul intégral* de Legendre (p. 302, édition de 1811), donne

$$\log V = 9,95084, \quad \log W = 9,65553.$$

D'autre part, les valeurs de μ , dans les cas qui se présentent ici, ne dépassent pas 1,3 et même n'atteignent que très rarement l'unité; le terme en μ^{10} est inférieur à 0,000001 et les développements g , h , θ , $\frac{dg}{d\mu}$, $\frac{dh}{d\mu}$, $\frac{d\theta}{d\mu}$ peuvent être limités aux premiers termes, en écrivant

$$g(\mu) = 1 + \frac{\mu^3}{18} + \frac{\mu^6}{1620} + \frac{\mu^9}{349920},$$

$$h(\mu) = \mu + \frac{\mu^4}{36} + \frac{\mu^7}{4536},$$

$$\theta(\mu) = \frac{\mu^2}{2} + \frac{\mu^5}{120} + \frac{\mu^8}{20160},$$

$$\frac{dg(\mu)}{d\mu} = \frac{\mu^2}{6} + \frac{\mu^5}{270} + \frac{\mu^8}{38880},$$

$$\frac{dh(\mu)}{d\mu} = 1 + \frac{\mu^3}{9} + \frac{\mu^6}{648} + \frac{\mu^9}{122472},$$

$$\frac{d\theta(\mu)}{d\mu} = \mu + \frac{\mu^4}{24} + \frac{\mu^7}{2520}.$$

ÉTUDE DU TERME EN $\frac{1}{\rho^3}$.

5. — *Séparation de ce terme en deux parties, dont l'une peut être calculée par une intégration immédiate. — Évaluation de cette partie directement intégrable.*

Le terme qui dépend de $\frac{1}{\rho^3}$ est, comme on l'a établi dans le paragraphe 2, dû à l'intégration de la différentielle

$$(19) \quad (de)_2 = \frac{m_1 k \sqrt{\rho}}{\rho^3} \left[(\xi_1 - r) \sin \varphi + 2 \eta_1 \cos^2 \frac{\varphi}{2} \right] dt,$$

dans laquelle on a respectivement [d'après (2), (3) et (7)],

$$\xi_1 = r_1 \cos B_1 \cos(L_1 - u),$$

$$\eta_1 = r_1 \cos B_1 \sin(L_1 - u),$$

$$u = \varphi + \omega;$$

et

$$\cos B_1 \sin L_1 = \sin(V_1 - \Omega) \cos i,$$

$$\cos B_1 \cos L_1 = \cos(V_1 - \Omega);$$

$$V_1 - \Omega = \zeta_1 - \Omega + 2e_1 \sin \zeta_1,$$

$$\zeta_1 = \zeta_0 + n_1 t;$$

$$r_1 = a_1 (1 - e_1 \cos \zeta_1),$$

$$\rho^2 = r_1^2 + r^2 - 2r\zeta_1.$$

En différentiant, par rapport au temps t , la dernière de ces égalités, on obtient, après suppression du facteur 2,

$$(20) \quad \rho \frac{d\rho}{dt} = r_1 \frac{dr_1}{dt} + r \frac{dr}{dt} - r \frac{d\zeta_1}{dt} - \zeta_1 \frac{dr}{dt},$$

mais ζ_1 dépend de t par l'intermédiaire des variables v et ζ_1 , de sorte que l'on a

$$\frac{d\zeta_1}{dt} = \frac{\partial \zeta_1}{\partial v} \frac{dv}{dt} + \frac{\partial \zeta_1}{\partial \zeta_1} \frac{d\zeta_1}{dt};$$

d'autre part,

$$\frac{dr}{dt} = \frac{k \sin v}{\sqrt{p}}, \quad \frac{r dv}{dt} = \frac{2k \cos^2 \frac{v}{2}}{\sqrt{p}}, \quad \frac{d\zeta_1}{dt} = n_1, \quad \frac{\partial \zeta_1}{\partial v} = n_1,$$

de telle façon que l'on pourra transformer la relation (20) comme il suit :

$$\rho \frac{d\rho}{dt} = r_1 \frac{dr_1}{dt} - \frac{k}{\sqrt{p}} \left[(\zeta_1 - r) \sin v + 2n_1 \cos^2 \frac{v}{2} \right] - n_1 r \frac{\partial \zeta_1}{\partial \zeta_1},$$

puis déduire

$$k\sqrt{p} \left[(\zeta_1 - r) \sin v + 2n_1 \cos^2 \frac{v}{2} \right] = pr_1 \frac{dr_1}{dt} - prn_1 \frac{\partial \zeta_1}{\partial \zeta_1} - p \frac{\rho d\rho}{dt}.$$

En substituant alors dans (19), il vient

$$(de)_2 = \frac{pm_1}{\rho^3} \left(r_1 \frac{dr_1}{dt} - n_1 r \frac{\partial \zeta_1}{\partial \zeta_1} \right) dt - pm_1 \frac{d\rho}{\rho^2},$$

ou, en posant $r_1 \frac{dr_1}{dt} - n_1 r \frac{\partial \zeta_1}{\partial \zeta_1} = E$,

$$(21) \quad (de)_2 = \frac{pm_1 E dt}{\rho^3} - pm_1 \frac{d\rho}{\rho^2}.$$

La perturbation totale, provenant de ce terme, et calculée depuis une époque antérieure très reculée jusqu'à l'instant $t = 0$, sera donc représentée par l'expression

$$\Delta_2(e) = pm_1 \int_{-\infty}^0 \frac{\mathbf{E} dt}{\rho^3} + pm_1 \int_{-\infty}^0 -\frac{1}{\rho^2} \frac{d\rho}{dt} dt.$$

On désignera par N le premier terme de $\Delta_2(e)$ et son étude fera l'objet des paragraphes suivants.

Quant au second terme, il est directement intégrable et sa valeur est $\frac{pm_1}{\rho_0}$, en appelant ρ_0 la distance mutuelle des deux astres à l'instant où la comète passe à son périhélie.

On constate immédiatement que cette partie de $\Delta_2(e)$ est toujours positive et d'autant plus importante que ρ_0 est moindre.

Si l'on représente par V_0 et r_0 l'anomalie vraie et le rayon vecteur de la planète pour l'époque $t = 0$, on obtiendra

$$\frac{pm_1}{\rho_0} = pm_1 [q^2 + r_0^2 - 2qr_0 f(V_0 - \Omega, \omega)]^{-\frac{1}{2}}.$$

Dans cette égalité $f(V_0 - \Omega, \omega)$ désigne, d'après la notation déjà rencontrée plus haut, la fonction

$$f(V_0 - \Omega, \omega) = \cos(V_0 - \Omega) \cos \omega + \sin(V_0 - \Omega) \sin \omega \cos i,$$

et s'obtient à l'aide de la Table I (p. 120).

Avant d'aborder l'étude, beaucoup plus pénible, du terme restant N, on fera quelques remarques concernant la Table des fonctions f (Table I).

6. — Remarques concernant la construction et l'usage de la Table des fonctions f (Table I).

La fonction

$$f(\alpha, \beta, i) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \cos i$$

n'est autre chose que le second membre de la relation fondamentale en trigonométrie sphérique.

Notre première idée a été de construire une Table à triple entrée, composée d'un certain nombre de Tables partielles à double entrée, se rapportant chacune à une valeur particulière de l'argument i .

Cela avait conduit à calculer 19 Tables, dans lesquelles i était égal à $0^\circ, 10^\circ,$

20°, ..., 180° et, dans chacune, on avait fait varier les arguments α et β de 3° en 3°.

En tenant compte des simplifications de symétrie, chacune de ces Tables contenait encore 2000 résultats.

Malheureusement, nous avons constaté que, malgré sa grande étendue, la Table à triple entrée ainsi construite était loin d'atteindre le but qu'on avait espéré réaliser : celui de fournir immédiatement f par une interpolation facile ; les différences étaient encore trop grandes et l'on ne pouvait interpoler que très péniblement.

Aussi malgré le temps considérable déjà dépensé pour la construction de cette Table, on n'a pas hésité à y renoncer.

Renonçant aussi, à cause de l'insuffisance de précision, à la méthode graphique, nous avons préféré, en procédant comme on va l'expliquer, rendre le calcul de f un peu moins immédiat, il est vrai, en le remplaçant par deux recherches successives ; mais de cette façon on a réussi à n'avoir que des interpolations assez faciles sur une Table unique, à double entrée et de peu d'étendue.

On peut écrire

$$f(\alpha, \beta, i) = \cos(\alpha - \beta) \cos^2 \frac{i}{2} + \cos(\alpha + \beta) \sin^2 \frac{i}{2},$$

de sorte qu'en posant

$$F(A, i) = \cos A \cos^2 \frac{i}{2},$$

$$G(B, i) = \cos B \sin^2 \frac{i}{2},$$

on a simplement

$$f(\alpha, \beta, i) = F(\alpha - \beta, i) + G(\alpha + \beta, i).$$

La Table I, où l'on doit, suivant le cas, lire l'argument i , à gauche pour avoir F , et à droite pour obtenir G , donne immédiatement les deux valeurs de F et de G avec 4 décimales (p. 120 à 127).

La même Table peut d'ailleurs servir à évaluer les trois expressions fondamentales de la Trigonométrie sphérique et, par conséquent, pourrait être utilisée pour un calcul approché relatif au triangle sphérique.

On a, en effet,

$$\cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A = f(b, c, A),$$

$$\sin b \cos c - \cos b \sin c \cos A = f\left(b - \frac{\pi}{2}, c, A\right),$$

$$\sin a \sin A = f\left(\frac{\pi}{2}, a, \frac{\pi}{2} - A\right).$$

7. — Étude du terme N; subdivision de ce terme.

Nous avons posé plus haut (p. 23),

$$N = pm_1 \int_{-\infty}^0 \frac{\mathbf{E} dt}{\rho^3} = pm_1 \int_{-\infty}^0 \frac{\left(r_1 \frac{dr_1}{d\zeta_1} - r \frac{\partial \zeta_1}{\partial \zeta_1} \right) n_1 dt}{\rho^3}.$$

L'expression $r_1 \frac{dr_1}{d\zeta_1} - r \frac{\partial \zeta_1}{\partial \zeta_1}$ est assez compliquée; en gardant les notations déjà adoptées dans le chapitre 5 (p. 11), on trouve

$$\frac{dr_1}{d\zeta_1} = a_1 e_1 \sin \zeta_1,$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \zeta_1}{\partial \zeta_1} = & a_1 (1 - e_1 \cos \zeta_1) (1 + 2e_1 \cos \zeta_1) [-\sin(V_1 - \Omega) \cos u + \cos(V_1 - \Omega) \sin u \cos i] \\ & + a_1 e_1 \sin \zeta_1 [\cos(V_1 - \Omega) \cos u + \sin(V_1 - \Omega) \sin u \cos i], \end{aligned}$$

ou, en négligeant les termes en e_1^2 , puis en simplifiant,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \zeta_1}{\partial \zeta_1} = & a_1 [\sin u \cos i \cos(\zeta_1 - \Omega) - \cos u \sin(\zeta_1 - \Omega)] \\ & + a_1 e_1 [\sin u \cos i \cos(2\zeta_1 - \Omega) - \cos u \sin(2\zeta_1 - \Omega)], \end{aligned}$$

et ensuite

$$\begin{aligned} r_1 \frac{dr_1}{d\zeta_1} - r \frac{\partial \zeta_1}{\partial \zeta_1} = & -ra_1 [\sin u \cos i \cos(\zeta_1 - \Omega) - \cos u \sin(\zeta_1 - \Omega)] \\ & + a_1 e_1 \{ a_1 \sin \zeta_1 - r [\sin u \cos i \cos(2\zeta_1 - \Omega) - \cos u \sin(2\zeta_1 - \Omega)] \}; \end{aligned}$$

avec la même approximation, on obtient

$$\begin{aligned} \rho^2 = & r^2 + a_1^2 (1 - 2e_1 \cos \zeta_1) \\ & - 2ra_1 [\cos u \cos(\zeta_1 - \Omega) + \sin u \sin(\zeta_1 - \Omega) \cos i] (1 - e_1 \cos \zeta_1) \\ & - 4ra_1 e_1 \sin \zeta_1 [\sin u \cos(\zeta_1 - \Omega) \cos i - \cos u \sin(\zeta_1 - \Omega)]. \end{aligned}$$

L'évaluation de N sous cette forme serait pénible et conduirait à des calculs fort longs; aussi s'est-on décidé à supposer l'orbite planétaire rigoureusement circulaire, ce qui revient à admettre

$$e_1 = 0, \quad \frac{dr_1}{d\zeta_1} = 0$$

de sorte que N se réduit à la forme

$$N = pm_1 \int_{-\infty}^0 \frac{-rr_1 [\sin u \cos i \cos(V_1 - \Omega) - \cos u \sin(V_1 - \Omega)]}{\{r_1^2 + r^2 - 2rr_1 [\cos u \cos(V_1 - \Omega) + \sin u \sin(V_1 - \Omega) \cos i]\}^{\frac{3}{2}}} n_1 dt,$$

où r_1 est constant.

Voici maintenant la marche qui a été suivie pour évaluer N : le dénominateur de la différentielle pouvant devenir très petit, il a semblé impossible de calculer cette intégrale à l'aide d'un seul développement en série, dont la convergence soit assez satisfaisante pour permettre de limiter le développement à un petit nombre de termes; on a donc jugé préférable de subdiviser l'intégrale en trois autres et cela de la manière suivante :

La première N_1 correspondra à la partie de N immédiatement voisine, de part et d'autre, de l'époque $t = t_j$ pour laquelle les rayons vecteurs des deux astres deviennent égaux; nous choisirons les limites (supérieure t_2 et inférieure t_1) de cette intégrale assez rapprochées de t_j pour que l'on puisse remplacer, avec une exactitude suffisante, le numérateur et le dénominateur de N_1 par des développements paraboliques.

La seconde intégrale partielle N_2 aura pour limite supérieure t_1 et s'étendra sur toute une révolution T de la planète, de sorte que la limite inférieure sera $t_1 - T$; à cette époque ($t_1 - T$) la distance mutuelle ρ sera devenue si considérable, que l'on pourra admettre comme négligeable l'effet dû à N dans la période antérieure, ainsi d'ailleurs qu'on le montrera (p. 43).

Enfin, la troisième intégrale N_3 , relative au voisinage du passage au périhélie de la comète, ne comprendra qu'un intervalle de 200 jours au maximum. Les limites en seront t_2 et zéro.

Les paragraphes suivants vont être consacrés à l'évaluation successive de N_1 , N_2 , N_3 .

8. — Calcul de l'intégrale partielle N_1 .

Si nous écrivons

$$F = r[\cos(V_1 - \Omega) \sin(\omega + \nu) \cos i - \sin(V_1 - \Omega) \cos(\omega + \nu)],$$

$$M = \rho^2 = r_1^2 + r^2 - 2rr_1[\cos(V_1 - \Omega) \cos(\omega + \nu) + \sin(\omega + \nu) \sin(V_1 - \Omega) \cos i],$$

la différentielle à intégrer prend la forme

$$\frac{-pm_1 r_1 F n_1 dt}{M^{\frac{3}{2}}}.$$

Ainsi qu'on l'a exposé à la fin du paragraphe précédent, on profitera ici, pour évaluer cette intégrale partielle, du peu d'étendue embrassé par les limites d'intégration; on assimilera, dans ces limites, l'orbite de la planète à un arc circulaire de rayon r_j , ce rayon répondant à la valeur commune des rayons vecteurs à l'époque t_j pour laquelle ils deviennent égaux.

Puis on remplacera, dans la différentielle, F et M par leurs valeurs F_j , M_j (relatives à t_j) complétées par des développements paraboliques procédant suivant les puissances d'une variable θ définie un peu plus loin, et qui est liée directement au temps t .

Dans ce qui va suivre, on conservera les notations antérieures en convenant d'affecter de l'indice j les quantités qui se rapportent à l'époque t_j , et l'on écrira

$$x = r \cos v, \quad y = r \sin v.$$

Désignant donc par V_j l'anomalie vraie de la planète à cet instant, on posera

$$n_j = \frac{k}{r_j^{\frac{3}{2}}}$$

et l'on admettra

$$V - \Omega = (V_j - \Omega) + n_j(t - t_j).$$

Afin de simplifier un peu, posons

$$V_j - \Omega = z_j,$$

de sorte que

$$A_j = \cos z_j \cos \omega + \sin z_j \sin \omega \cos i,$$

$$B_j = -\cos z_j \sin \omega + \sin z_j \cos \omega \cos i,$$

$$C_j = -\sin z_j \cos \omega + \cos z_j \sin \omega \cos i,$$

$$D_j = \sin z_j \sin \omega + \cos z_j \cos \omega \cos i,$$

avec la vérification

$$A_j D_j - B_j C_j = \cos i,$$

puis introduisons la variable θ définie par la relation

$$\theta = n_j(t - t_j),$$

d'où

$$d\theta = n_j dt, \quad V - \Omega = z_j + \theta;$$

la différentielle prendra ainsi la forme

$$(22) \quad -pm_1 r_j \frac{x(C_j \cos \theta - A_j \sin \theta) + y(D_j \cos \theta - B_j \sin \theta)}{\{r_j^2 + r^2 - 2r_j[x(A_j \cos \theta + C_j \sin \theta) + y(B_j \cos \theta + D_j \sin \theta)]\}^{\frac{3}{2}}} d\theta.$$

On va maintenant, ainsi qu'on l'a dit plus haut, remplacer F et M par les développements

$$F = (F)_j + \left(\frac{dF}{d\theta}\right)_j \theta + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2 F}{d\theta^2}\right)_j \theta^2,$$

$$M = (M)_j + \left(\frac{dM}{d\theta}\right)_j \theta + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2 M}{d\theta^2}\right)_j \theta^2.$$

Il est donc nécessaire de chercher tout d'abord l'expression algébrique des coefficients qui figurent dans les deux développements; on trouve sans difficulté, dans le cas général, les valeurs suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{dF}{d\theta} &= (C_j \cos \theta - A_j \sin \theta) \frac{dx}{d\theta} + (D_j \cos \theta - B_j \sin \theta) \frac{dy}{d\theta} \\ &\quad - (A_j \cos \theta + C_j \sin \theta) x - (B_j \cos \theta + D_j \sin \theta) y, \\ \frac{d^2 F}{d\theta^2} &= \left(\frac{d^2 x}{d\theta^2} - x\right) (C_j \cos \theta - A_j \sin \theta) + \left(\frac{d^2 y}{d\theta^2} - y\right) (D_j \cos \theta - B_j \sin \theta) \\ &\quad - 2 \frac{dx}{d\theta} (A_j \cos \theta + C_j \sin \theta) - 2 \frac{dy}{d\theta} (B_j \cos \theta + D_j \sin \theta), \\ \frac{dM}{d\theta} &= \frac{d(r^2)}{d\theta} - 2r_j \left[(A_j \cos \theta + C_j \sin \theta) \frac{dx}{d\theta} + (B_j \cos \theta + D_j \sin \theta) \frac{dy}{d\theta} \right. \\ &\quad \left. + (C_j \cos \theta - A_j \sin \theta) x + (D_j \cos \theta - B_j \sin \theta) y \right], \\ \frac{d^2 M}{d\theta^2} &= \frac{d^2(r^2)}{d\theta^2} - 2r_j \left[\left(\frac{d^2 x}{d\theta^2} - x\right) (A_j \cos \theta + C_j \sin \theta) + \left(\frac{d^2 y}{d\theta^2} - y\right) (B_j \cos \theta + D_j \sin \theta) \right. \\ &\quad \left. + 2 \frac{dx}{d\theta} (C_j \cos \theta - A_j \sin \theta) + 2 \frac{dy}{d\theta} (D_j \cos \theta - B_j \sin \theta) \right]. \end{aligned}$$

Pour l'époque t_j , ces expressions se simplifient notablement, car, à cet instant,

$$\theta = 0, \quad r = r_j,$$

et il vient

$$(23) \quad \left\{ \begin{aligned} F_j &= C_j x_j + D_j y_j, \\ \left(\frac{dF}{d\theta}\right)_j &= C_j \left(\frac{dx}{d\theta}\right)_j + D_j \left(\frac{dy}{d\theta}\right)_j - (A_j x_j + B_j y_j), \\ \left(\frac{d^2 F}{d\theta^2}\right)_j &= \left[\left(\frac{d^2 x}{d\theta^2}\right)_j - x_j\right] C_j + \left[\left(\frac{d^2 y}{d\theta^2}\right)_j - y_j\right] D_j - 2 \left[A_j \left(\frac{dx}{d\theta}\right)_j + B_j \left(\frac{dy}{d\theta}\right)_j\right], \\ M_j &= 2r_j^2 - 2r_j [A_j x_j + B_j y_j], \\ \left(\frac{dM}{d\theta}\right)_j &= \left(\frac{d(r^2)}{d\theta}\right)_j - 2r_j \left[A_j \left(\frac{dx}{d\theta}\right)_j + B_j \left(\frac{dy}{d\theta}\right)_j + C_j x_j + D_j y_j\right], \\ \left(\frac{d^2 M}{d\theta^2}\right)_j &= \left(\frac{d^2(r^2)}{d\theta^2}\right)_j - 2r_j \left\{ \left[\left(\frac{d^2 x}{d\theta^2}\right)_j - x_j\right] A_j + \left[\left(\frac{d^2 y}{d\theta^2}\right)_j - y_j\right] B_j + 2 \left[C_j \left(\frac{dx}{d\theta}\right)_j + D_j \left(\frac{dy}{d\theta}\right)_j\right] \right\}. \end{aligned} \right.$$

Pour évaluer maintenant les quantités $\left(\frac{dx}{d\theta}\right)_j$, $\left(\frac{dy}{d\theta}\right)_j$, ..., $\left(\frac{d^2(r^2)}{d\theta^2}\right)_j$, on fera usage de la relation

$$r(1 + \cos \varphi) = r + x = p,$$

qui donne

$$(24) \quad \frac{d^n r}{d\theta^n} = - \frac{d^n x}{d\theta^n}$$

et aussi

$$(25) \quad \frac{dv}{d\theta} = \frac{dv}{dt} \frac{dt}{d\theta} = \frac{1}{n_j} \frac{k\sqrt{p}}{r^2} = \sqrt{p} \frac{r_j^{\frac{3}{2}}}{r^2}.$$

De simples différentiations effectuées en tenant compte de (24) et (25) vont fournir, sans difficulté, les expressions cherchées.

Calcul de $\left(\frac{dx}{d\theta}\right)_j$ et $\left(\frac{d^2x}{d\theta^2}\right)_j$. — De $x = r \sin \varphi$ on déduit successivement

$$\frac{dx}{d\theta} = \frac{dr}{d\theta} \cos \varphi - r \sin \varphi \frac{dv}{d\theta}, \quad \frac{dx}{d\theta} (1 + \cos \varphi) = - \sin \varphi \frac{\sqrt{p}}{r} r_j^{\frac{3}{2}}$$

et, comme $1 + \cos \varphi = \frac{p}{r}$,

$$\frac{dx}{d\theta} = \frac{- \sin \varphi}{\sqrt{p}} r_j^{\frac{3}{2}} = - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{r}} r_j^{\frac{3}{2}} \sin \frac{\varphi}{2};$$

il en résulte

$$(26) \quad \left(\frac{dx}{d\theta}\right)_j = - \sqrt{2} r_j \sin \frac{\varphi_j}{2};$$

on a ensuite

$$\frac{d^2x}{d\theta^2} = - \frac{\cos \varphi}{\sqrt{p}} r_j^{\frac{3}{2}} \frac{dv}{d\theta} = - \cos \varphi \frac{r_j^3}{r^2} = - x \left(\frac{r_j}{r}\right)^3,$$

d'où

$$(27) \quad \left(\frac{d^2x}{d\theta^2}\right)_j = - x_j.$$

Calcul de $\left(\frac{dy}{d\theta}\right)_j$ et $\left(\frac{d^2y}{d\theta^2}\right)_j$. — En partant cette fois de $y = r \sin \varphi$, on trouve, par une marche analogue,

$$\frac{dy}{d\theta} = \frac{dr}{d\theta} \sin \varphi + r \cos \varphi \frac{dv}{d\theta} = \frac{r_j^2}{\sqrt{p}} (1 + \cos \varphi) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{r}} r_j^{\frac{3}{2}} \cos \frac{\varphi}{2},$$

d'où

$$(28) \quad \left(\frac{dy}{d\theta} \right)_j = \sqrt{2} r_j \cos \frac{\nu_j}{2},$$

et, de même,

$$\frac{d^2 y}{d\theta^2} = \frac{-r_j^3}{\sqrt{p}} \sin \nu \frac{d\nu}{d\theta} = -\sin \nu \frac{r_j^3}{r^2} = -y \left(\frac{r_j}{r} \right)^3,$$

puis

$$(29) \quad \left(\frac{d^2 y}{d\theta^2} \right)_j = -y_j.$$

Calcul de $\left(\frac{d(r^2)}{d\theta} \right)_j$ et $\left(\frac{d^2(r^2)}{d\theta^2} \right)_j$. — On a

$$\frac{d(r^2)}{d\theta} = 2r \frac{dr}{d\theta} = -2r \frac{dx}{d\theta} = 2\sqrt{2} \sqrt{r} r_j^{\frac{3}{2}} \sin \frac{\nu}{2},$$

ce qui donne

$$(30) \quad \left(\frac{d(r^2)}{d\theta} \right)_j = 2\sqrt{2} r_j^{\frac{3}{2}} \sin \frac{\nu_j}{2}.$$

On en déduit

$$\frac{d^2(r^2)}{d\theta^2} = \frac{d}{d\theta} \left(\frac{d(r^2)}{d\theta} \right) = \frac{2r_j^3}{r}$$

et enfin

$$(31) \quad \left(\frac{d^2(r^2)}{d\theta^2} \right)_j = 2r_j^3.$$

En tenant compte de ces derniers résultats et en posant, afin d'abrégier l'écriture,

$$G_j = A_j \cos \nu_j + B_j \sin \nu_j = f(z_j, u_j),$$

$$H_j = C_j \cos \nu_j + D_j \sin \nu_j = f\left(z_j + \frac{\pi}{2}, u_j\right),$$

$$P_j = -A_j \sin \frac{\nu_j}{2} + B_j \cos \frac{\nu_j}{2} = f\left(z_j, \omega + \frac{\nu_j}{2} + \frac{\pi}{2}\right),$$

$$Q_j = -C_j \sin \frac{\nu_j}{2} + D_j \cos \frac{\nu_j}{2} = f\left(z_j + \frac{\pi}{2}, \omega + \frac{\nu_j}{2} + \frac{\pi}{2}\right)$$

avec la vérification

$$G_j Q_j - P_j H_j = \cos i \cos \frac{\nu_j}{2},$$

les quatre quantités G_j, H_j, P_j, Q_j étant fournies par la Table I, on aura

$$A_j x_j + B_j y_j = r_j G_j,$$

$$C_j x_j + D_j y_j = r_j H_j,$$

$$A_j \left(\frac{dx}{d\theta} \right)_j + B_j \left(\frac{dy}{d\theta} \right)_j = \sqrt{2} r_j P_j,$$

$$C_j \left(\frac{dx}{d\theta} \right)_j + D_j \left(\frac{dy}{d\theta} \right)_j = \sqrt{2} r_j Q_j,$$

et, en substituant dans (23),

$$(32) \quad \left\{ \begin{array}{l} F_j = r_j H_j, \\ \left(\frac{dF}{d\theta} \right)_j = r_j (\sqrt{2} Q_j - G_j), \\ \frac{1}{2} \left(\frac{d^2 F}{d\theta^2} \right)_j = -r_j (H_j + \sqrt{2} P_j), \\ M_j = 2 r_j^2 (1 - G_j), \\ \left(\frac{dM}{d\theta} \right)_j = 2 r_j^2 \left(\sqrt{2} \sin \frac{\varphi_j}{2} - \sqrt{2} P_j - H_j \right), \\ \frac{1}{2} \left(\frac{d^2 M}{d\theta^2} \right)_j = r_j^2 [1 - 2(\sqrt{2} Q_j - G_j)]. \end{array} \right.$$

Les développements cherchés deviennent

$$F = r_j [H_j + (\sqrt{2} Q_j - G_j)\theta - (H_j + \sqrt{2} P_j)\theta^2],$$

$$M = r_j^2 \left\{ 2[1 - G_j] + 2 \left[\sqrt{2} \sin \frac{\varphi_j}{2} - (\sqrt{2} P_j + H_j) \right] \theta + [1 - 2(\sqrt{2} Q_j - G_j)] \theta^2 \right\}.$$

Avant de substituer dans la différentielle, on posera

$$H_j = \alpha,$$

$$\sqrt{2} Q_j - G_j = \beta,$$

$$\sqrt{2} P_j + H_j = \gamma,$$

$$2(1 - G_j) = a,$$

$$\sqrt{2} \sin \frac{\varphi_j}{2} - \gamma = b,$$

$$1 - 2\beta = c,$$

avec les vérifications

$$a + c - 3 = -2\sqrt{2} Q_j,$$

$$\frac{2Q_j}{\sin \frac{\varphi_j}{2} - P_j} = \frac{3 - a - c}{\alpha + b}.$$

L'expression à intégrer prendra la forme

$$(33) \quad \frac{-pm_1}{r_j} \frac{\alpha + \beta \theta - \gamma \theta^2}{(a + 2b\theta + c\theta^2)^{\frac{3}{2}}} d\theta.$$

Il faut donc chercher l'intégrale indéfinie

$$J = \int \frac{\alpha + \beta \theta - \gamma \theta^2}{(a + 2b\theta + c\theta^2)^{\frac{3}{2}}} d\theta,$$

qui est de la forme

$$\int \varphi(x, \sqrt{\lambda x^2 + \mu x + \nu}) dx.$$

On peut écrire successivement

$$\begin{aligned} J &= \frac{1}{c} \int \frac{\alpha c + \beta c\theta - \gamma c\theta^2 - 2b\gamma\theta - a\gamma + 2b\gamma\theta + a\gamma}{(a + 2b\theta + c\theta^2)^{\frac{3}{2}}} d\theta \\ &= \frac{\alpha c + a\gamma}{c} \int \frac{d\theta}{(a + 2b\theta + c\theta^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &\quad + \frac{\beta c + 2b\gamma}{c} \int \frac{\theta d\theta}{(a + 2b\theta + c\theta^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{\gamma}{c} \int \frac{d\theta}{\sqrt{a + 2b\theta + c\theta^2}}, \end{aligned}$$

les intégrales nouvelles sont ramenées à une forme classique et l'on trouve

$$\begin{aligned} \int \frac{\theta d\theta}{(a + 2b\theta + c\theta^2)^{\frac{3}{2}}} &= \frac{-(a + b\theta)}{(ac - b^2)\sqrt{a + 2b\theta + c\theta^2}}, \\ \int \frac{d\theta}{(a + 2b\theta + c\theta^2)^{\frac{3}{2}}} &= \frac{c\theta + b}{(ac - b^2)\sqrt{a + 2b\theta + c\theta^2}}; \end{aligned}$$

pour la dernière des trois intégrales, on doit distinguer deux cas et écrire :

1° Si $c > 0$:

$$\int \frac{d\theta}{\sqrt{a + 2b\theta + c\theta^2}} = \frac{1}{\sqrt{c}} L \left(\sqrt{\frac{a + 2b\theta + c\theta^2}{c}} + \frac{c\theta + b}{c} \right);$$

2° Si $c < 0$:

$$\int \frac{d\theta}{\sqrt{a + 2b\theta + c\theta^2}} = \frac{-1}{\sqrt{-c}} \arcsin \frac{c\theta + b}{\sqrt{b^2 - ac}}.$$

Si l'on désigne par θ_1 et θ_2 les deux limites de notre intégrale J , on aura, en résumé, pour N_1 , l'une des deux expressions suivantes, selon le signe de c .

Premier cas. — $c > 0$:

$$\begin{aligned} (34) \quad N_1 &= \frac{-pm_1}{r_j} \frac{1}{c(ac - b^2)} \left| \frac{(\alpha c + a\gamma)(c\theta + b) - (\beta c + 2b\gamma)(a + b\theta)}{\sqrt{a + 2b\theta + c\theta^2}} \right|_{\theta_1}^{\theta_2} \\ &\quad + \frac{pm_1}{r_j} \frac{\gamma}{c^{\frac{3}{2}}} L \frac{\sqrt{\frac{a + 2b\theta_2 + c\theta_2^2}{c}} + \frac{c\theta_2 + b}{c}}{\sqrt{\frac{a + 2b\theta_1 + c\theta_1^2}{c}} + \frac{c\theta_1 + b}{c}}. \end{aligned}$$

Deuxième cas. — $c < 0$:

$$(35) \quad N_1 = \frac{-pm_1}{r_j} \frac{1}{c(ac - b^2)} \left| \frac{(\alpha c + a\gamma)(c\theta + b) - (\beta c + 2b\gamma)(a + b\theta)}{\sqrt{a + 2b\theta + c\theta^2}} \right|_{\theta_1}^{\theta_2} \\ - \frac{pm_1}{r_j} \frac{\gamma}{c\sqrt{-c}} \left(\arcsin \frac{c\theta_2 + b}{\sqrt{b^2 - ac}} - \arcsin \frac{c\theta_1 + b}{\sqrt{b^2 - ac}} \right).$$

Il sera indispensable de choisir θ_1 et θ_2 , pour chaque planète, de manière que, dans l'intervalle de l'intégration, les développements employés pour F et M soient suffisamment exacts.

Remarque. Dans le cas exceptionnel où c serait assez petit pour qu'on puisse le supposer nul, le calcul de J serait notablement simplifié.

On aurait alors

$$J = \int \frac{\alpha + \beta\theta - \gamma\theta^2}{(\alpha + 2b\theta)^{\frac{3}{2}}} d\theta,$$

qui s'intègre beaucoup plus aisément.

9. — Calcul de l'intégrale partielle N_2 .

Cette intégrale, qui correspond à la partie de N relative à la portion inférieure de l'orbite de la comète, a pour expression

$$-pm_1 r_1 \int_{-\infty}^{t_1} \frac{\mathbf{F}}{\rho^3} n_1 dt.$$

L'évaluation en serait possible par un développement de $\frac{1}{\rho^3}$ suivant les puissances de $\frac{a_1}{r}$, mais le peu de convergence de la série exigerait que l'on prenne un nombre considérable de termes; pour cette raison, on a décidé de limiter l'étendue d'intégration à celle d'une révolution sidérale T de la planète perturbatrice, de sorte que l'on a cherché à calculer

$$N_2 = -pm_1 r_1 \int_{t_1 - T}^{t_1} \frac{\mathbf{F} n_1 dt}{\rho^3}.$$

En procédant ainsi, on néglige l'intégrale

$$-pm_1 r_1 \int_{-\infty}^{t_1 - T} \frac{\mathbf{F} n_1 dt}{\rho^3},$$

mais on montrera un peu plus loin (§ 11) que cette partie de N_2 est négligeable.

F.

Pour évaluer N_2 , on ne tiendra pas compte de l'excentricité de la planète; en convenant d'affecter de l'indice m les quantités relatives à l'époque $t_m = t - \frac{T}{2}$ (intermédiaire entre les deux limites d'intégration) et en posant

$$\begin{aligned} n_1(t - t_m) &= \tau, \\ \zeta_m - \Omega &= z_m, \end{aligned}$$

puis en identifiant V_m avec ζ_m , on aura la relation

$$N_2 = -p m_1 a_1 \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\cos(z_m + \tau) \sin(\omega + \nu) \cos i - \sin(z_m + \tau) \cos(\nu + \omega)}{M^{\frac{3}{2}}} r d\tau,$$

dans laquelle

$$M = a_1^2 + r^2 - 2a_1 r [\cos(z_m + \tau) \cos(\omega + \nu) + \sin(z_m + \tau) \sin(\omega + \nu) \cos i].$$

En convenant alors d'écrire, par analogie avec les notations qui précèdent,

$$\begin{aligned} A_m &= f(z_m, \omega) &= \cos z_m \cos \omega + \sin z_m \sin \omega \cos i, \\ B_m &= f\left(z_m, \omega + \frac{\pi}{2}\right) &= -\cos z_m \sin \omega + \sin z_m \cos \omega \cos i, \\ C_m &= f\left(z_m + \frac{\pi}{2}, \omega\right) &= -\sin z_m \cos \omega + \cos z_m \sin \omega \cos i, \\ D_m &= f\left(z_m + \frac{\pi}{2}, \omega + \frac{\pi}{2}\right) &= \sin z_m \sin \omega + \cos z_m \cos \omega \cos i, \\ x &= r \cos \nu, \\ y &= r \sin \nu, \end{aligned}$$

on obtiendra

$$(36) \quad N_2 = -p m_1 a_1 \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{(C_m x + D_m y) \cos \tau - (A_m x + B_m y) \sin \tau}{M^{\frac{3}{2}}} d\tau$$

avec

$$M = a_1^2 + r^2 - 2a_1 [x(A_m \cos \tau + C_m \sin \tau) + y(B_m \cos \tau + D_m \sin \tau)].$$

Voici le procédé qui sera employé pour le calcul de cette intégrale (36) :

1° Au numérateur, on remplacera x et y par leurs développements suivant les puissances de τ , limités aux termes du second degré

$$\begin{aligned} x &= (x)_m + \left(\frac{dx}{d\tau}\right)_m \tau + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2 x}{d\tau^2}\right)_m \tau^2, \\ y &= (y)_m + \left(\frac{dy}{d\tau}\right)_m \tau + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2 y}{d\tau^2}\right)_m \tau^2; \end{aligned}$$

2° Au dénominateur, on tirera parti de la grandeur de φ_m pour substituer à $\frac{1}{\rho^3}$ l'expression

$$\mathbf{M}^{-\frac{3}{2}} = (\mathbf{M}^{-\frac{3}{2}})_m \left\{ 1 - \frac{3\tau}{2\mathbf{M}_m} \left(\frac{d\mathbf{M}}{d\tau} \right)_m + \frac{\tau^2}{2} \left[-\frac{3}{2\mathbf{M}_m} \left(\frac{d^2\mathbf{M}}{d\tau^2} \right)_m + \frac{15}{4\mathbf{M}_m^2} \left(\frac{d\mathbf{M}}{d\tau} \right)_m^2 \right] \right\}.$$

Pour obtenir les coefficients de ces développements, il suffit de se reporter aux calculs déjà effectués au paragraphe 8, en remarquant qu'à l'époque t_m la variable τ est nulle; il vient alors

$$\begin{aligned} (\mathbf{M})_m &= \alpha_1^2 + r_m^2 - 2\alpha_1(\mathbf{A}_m x_m + \mathbf{B}_m y_m), \\ \left(\frac{d\mathbf{M}}{d\tau} \right)_m &= \left(\frac{d(r^2)}{d\tau} \right)_m - 2\alpha_1 \left[\mathbf{A}_m \left(\frac{dx}{d\tau} \right)_m + \mathbf{B}_m \left(\frac{dy}{d\tau} \right)_m + \mathbf{C}_m x_m + \mathbf{D}_m y_m \right], \\ \left(\frac{d^2\mathbf{M}}{d\tau^2} \right)_m &= \left(\frac{d^2(r^2)}{d\tau^2} \right)_m - 2\alpha_1 \left\{ \left[\left(\frac{d^2x}{d\tau^2} \right)_m - x_m \right] \mathbf{A}_m \right. \\ &\quad \left. + \left[\left(\frac{d^2y}{d\tau^2} \right)_m - y_m \right] \mathbf{B}_m + 2 \left[\mathbf{C}_m \left(\frac{dx}{d\tau} \right)_m + \mathbf{D}_m \left(\frac{dy}{d\tau} \right)_m \right] \right\}, \end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned} \left(\frac{dx}{d\tau} \right)_m &= r_m \sqrt{2} \left(\frac{a_1}{r_m} \right)^{\frac{3}{2}} \sin \frac{\varphi_m}{2}, & \left(\frac{dy}{d\tau} \right)_m &= r_m \sqrt{2} \left(\frac{a_1}{r_m} \right)^{\frac{3}{2}} \cos \frac{\varphi_m}{2}, \\ \left(\frac{d^2x}{d\tau^2} \right)_m &= -x_m \left(\frac{a_1}{r_m} \right)^3, & \left(\frac{d^2y}{d\tau^2} \right)_m &= -y_m \left(\frac{a_1}{r_m} \right)^3, \\ \left(\frac{d(r^2)}{d\tau} \right)_m &= 2\sqrt{2} \alpha_1 r_m \left(\frac{a_1}{r_m} \right)^{\frac{1}{2}} \sin \frac{\varphi_m}{2}, \\ \left(\frac{d^2(r^2)}{d\tau^2} \right)_m &= \frac{2\alpha_1^2}{r_m}. \end{aligned}$$

En posant, comme dans ce qui précède (p. 30)

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_m &= f(\varpi_m, u_m), \\ \mathbf{H}_m &= f\left(\varpi_m + \frac{\pi}{2}, u_m\right), \\ \mathbf{P}_m &= f\left(\varpi_m, \omega + \frac{\varphi_m}{2} + \frac{\pi}{2}\right), \\ \mathbf{Q}_m &= f\left(\varpi_m + \frac{\pi}{2}, \omega + \frac{\varphi_m}{2} + \frac{\pi}{2}\right), \end{aligned}$$

avec la vérification

$$\mathbf{G}_m \mathbf{Q}_m - \mathbf{P}_m \mathbf{H}_m = \cos i \cos \frac{\varphi_m}{2},$$

on obtiendra

$$\begin{aligned} A_m x_m + B_m y_m &= r_m G_m, \\ C_m x_m + D_m y_m &= r_m H_m, \\ A_m \left(\frac{dx}{d\tau} \right)_m + B_m \left(\frac{dy}{d\tau} \right)_m &= r_m \sqrt{2} \left(\frac{a_1}{r_m} \right)^{\frac{3}{2}} P_m, \\ C_m \left(\frac{dx}{d\tau} \right)_m + D_m \left(\frac{dy}{d\tau} \right)_m &= r_m \sqrt{2} \left(\frac{a_1}{r_m} \right)^{\frac{3}{2}} Q_m. \end{aligned}$$

De sorte que, en écrivant $\left(\frac{a_1}{r_m} \right)^{\frac{1}{2}} = \varepsilon$, les relations ci-dessus deviendront

$$(37) \quad \left\{ \begin{aligned} M_m &= r_m^2 (1 - 2\varepsilon^2 G_m + \varepsilon^4), \\ \left(\frac{dM}{d\tau} \right)_m &= 2 r_m^2 \varepsilon^2 \left[\sqrt{2} \varepsilon \sin \frac{\varphi_m}{2} - (\sqrt{2} \varepsilon^3 P_m + H_m) \right], \\ \left(\frac{d^2 M}{d\tau^2} \right)_m &= 2 r_m^2 \varepsilon^2 \left[\varepsilon^4 - 2 \sqrt{2} \varepsilon^3 Q_m + G_m (1 + \varepsilon^6) \right], \\ A_m x + B_m y &= \frac{a_1}{\varepsilon^2} \left(G_m + \sqrt{2} \varepsilon^3 P_m \tau - \varepsilon^6 G_m \frac{\tau^2}{2} \right), \\ C_m x + D_m y &= \frac{a_1}{\varepsilon^2} \left(H_m + \sqrt{2} \varepsilon^3 Q_m \tau - \varepsilon^6 H_m \frac{\tau^2}{2} \right). \end{aligned} \right.$$

Pour abréger l'écriture dans ce qui va suivre, on conviendra de poser

$$(38) \quad \left\{ \begin{aligned} \varphi &= \frac{3 \left(-\varepsilon \sqrt{2} \sin \frac{\varphi_m}{2} + \sqrt{2} \varepsilon^3 P_m + H_m \right)}{1 - 2\varepsilon^2 G_m + \varepsilon^4}, \\ \chi &= \frac{3 \left[-\varepsilon^4 + 2 \sqrt{2} \varepsilon^3 Q_m - G_m (1 + \varepsilon^6) \right]}{2(1 - 2\varepsilon^2 G_m + \varepsilon^4)} + \frac{5}{6} \varepsilon^2 \varphi^2. \end{aligned} \right.$$

Il viendra, en conséquence,

$$\begin{aligned} -\frac{3}{2 M_m} \left(\frac{dM}{d\tau} \right)_m &= \varphi \varepsilon^2, \\ -\frac{3}{4 M_m} \left(\frac{d^2 M}{d\tau^2} \right)_m + \frac{15}{8} \left(\frac{dM}{d\tau} \right)_m^2 \frac{1}{M_m^2} &= \chi \varepsilon^2, \end{aligned}$$

puis

$$M^{-\frac{3}{2}} = \frac{\varepsilon^6}{a_1^3 (1 - 2\varepsilon^2 G_m + \varepsilon^4)^{\frac{3}{2}}} (1 + \varphi \varepsilon^2 \tau + \chi \varepsilon^2 \tau^2).$$

On sera ramené à évaluer l'expression suivante :

$$(39) \quad \begin{aligned} & \frac{-p m_1 \varepsilon^4}{a_1 (1 - 2\varepsilon^2 G_m + \varepsilon^4)^{\frac{3}{2}}} \int_{\pi}^{+\pi} \left(H_m + \sqrt{2} \varepsilon^3 Q_m \tau - \varepsilon^6 H_m \frac{\tau^2}{2} \right) (1 + \varphi \varepsilon^2 \tau + \chi \varepsilon^2 \tau^2) \cos \tau d\tau \\ & + \frac{p m_1 \varepsilon^4}{a_1 (1 - 2\varepsilon^2 G_m + \varepsilon^4)^{\frac{3}{2}}} \int_{-\pi}^{+\pi} \left(G_m + \sqrt{2} \varepsilon^3 P_m \tau - \varepsilon^6 G_m \frac{\tau^2}{2} \right) (1 + \varphi \varepsilon^2 \tau + \chi \varepsilon^2 \tau^2) \sin \tau d\tau. \end{aligned}$$

Mais, d'autre part, on trouve aisément

$$\begin{aligned}
 \int_{-\pi}^{+\pi} \sin \tau \, d\tau &= 0, & \int_{-\pi}^{+\pi} \cos \tau \, d\tau &= 0, \\
 \int_{-\pi}^{+\pi} \tau \sin \tau \, d\tau &= 2\pi, & \int_{-\pi}^{+\pi} \tau \cos \tau \, d\tau &= 0, \\
 \int_{-\pi}^{+\pi} \tau^2 \sin \tau \, d\tau &= 0, & \int_{-\pi}^{+\pi} \tau^2 \cos \tau \, d\tau &= -4\pi, \\
 \int_{-\pi}^{+\pi} \tau^3 \sin \tau \, d\tau &= 2\pi(\pi^2 - 6), & \int_{-\pi}^{+\pi} \tau^3 \cos \tau \, d\tau &= 0, \\
 \int_{-\pi}^{+\pi} \tau^4 \sin \tau \, d\tau &= 0, & \int_{-\pi}^{+\pi} \tau^4 \cos \tau \, d\tau &= -8\pi(\pi^2 - 6).
 \end{aligned}$$

En substituant dans (39), il vient

$$\begin{aligned}
 N_2 = \frac{2\pi p m_1 \varepsilon^5}{a_1 (1 - 2\varepsilon^2 G_m + \varepsilon^4)^{\frac{3}{2}}} & \left\{ \sqrt{2} \varepsilon P_m - \varepsilon^4 H_m + \varphi (2\sqrt{2} \varepsilon^3 Q_m + G_m) + 2\chi H_m \right. \\
 & \left. + (\pi^2 - 6) \varepsilon^3 \left[-\frac{\varphi}{2} \varepsilon^3 G_m + \chi (\sqrt{2} P_m - 2\varepsilon^3 H_m) \right] \right\},
 \end{aligned}$$

ce que l'on peut écrire finalement

$$\begin{aligned}
 (40) \quad N_2 = \frac{4\pi m_1 q}{a_1} \frac{\varepsilon^6}{(1 - 2\varepsilon^2 G_m + \varepsilon^4)^{\frac{3}{2}}} & \left\{ \sqrt{2} \varepsilon P_m - \varepsilon^4 H_m \right. \\
 & + \varphi \left\{ 2\sqrt{2} \varepsilon^3 Q_m + G_m \left(1 - \frac{\pi^2 - 6}{2} \varepsilon^6 \right) \right\} \\
 & \left. + \chi \left[(\pi^2 - 6) \sqrt{2} \varepsilon^3 P_m + 2 H_m \left(1 - (\pi^2 - 6) \varepsilon^6 \right) \right] \right\}.
 \end{aligned}$$

C'est la formule que l'on emploiera, mais en tenant compte du fait que ε est sensiblement le même pour les différentes comètes.

10. — Calcul de l'intégrale partielle N_3 .

Cette intégrale est la partie de N relative à l'intervalle compris entre t_2 (limite supérieure de l'intégrale N_1) et l'époque $t = 0$ du passage au périhélie de la comète.

D'après la façon dont t_2 a été déterminé, on voit que N_3 embrasse un intervalle de temps assez court, pendant lequel l'anomalie de la planète perturbatrice varie peu.

La difficulté vient ici de ce que, au voisinage de $t = 0$, l'anomalie de la comète varie au contraire très rapidement, et d'une façon très irrégulière par rapport au temps, surtout si q est faible; mais on montrera que, même dans le cas où la planète est Jupiter, l'intégrale N_3 ne peut atteindre que quelques secondes d'arc si q est petit ⁽¹⁾.

Pour mettre en évidence cette particularité, on va chercher à évaluer N_3 en se plaçant dans le cas le plus défavorable; pour cela on fera les deux hypothèses suivantes, dont la seconde surtout est pratiquement irréalisable :

1° On admettra que la différentielle a toujours le même signe dans les limites d'intégration;

2° On supposera, en outre, que, dans ces limites, la différentielle atteint à chaque instant (c'est-à-dire pour toutes les valeurs de r) sa plus grande valeur absolue.

Si l'on se reporte à l'expression de l'élément différentiel $\frac{F}{M^{\frac{3}{2}}}$, savoir

$$\frac{F}{M^{\frac{3}{2}}} = \frac{r[\cos(V_1 - \Omega) \sin(\omega + \nu) \cos i - \sin(V_1 - \Omega) \cos(\omega + \nu)]}{\{a_1^2 + r^2 - 2a_1r[\cos(V_1 - \Omega) \cos(\omega + \nu) + \sin(V_1 - \Omega) \sin(\omega + \nu) \cos i]\}^{\frac{3}{2}}},$$

on remarque immédiatement que, toutes choses égales, cette expression peut atteindre une valeur absolue d'autant plus grande que le module de $\cos i$ se rapproche plus de l'unité.

Commençons donc par supposer

$$|\cos i| = 1,$$

en sorte qu'il viendra

$$(41) \quad \frac{F}{M^{\frac{3}{2}}} = \frac{r \sin \varphi}{(a_1^2 + r^2 - 2a_1r \cos \varphi)^{\frac{3}{2}}},$$

où φ désigne l'angle $(\nu + \omega) \pm (V_1 - \Omega)$.

Il est alors aisé de se rendre compte que, pour une valeur donnée de r

$$r = r_t,$$

l'expression (41) atteint sa valeur absolue maxima lorsque l'angle φ satisfait à

⁽¹⁾ Laplace (*Méc. céleste*, t. IV) arrive à une conclusion identique.

la condition

$$(42) \quad \left\{ \begin{array}{l} \cos \varphi = \frac{-(1 + \mu^2) + \sqrt{1 + 14\mu^2 + \mu^4}}{2\mu}, \\ \text{dans laquelle} \\ \mu = \frac{r_i}{a_1}. \end{array} \right.$$

Comme on l'a dit plus haut, il faut s'attendre, en supposant cette condition (42) réalisée pour toutes les valeurs de r , dans les limites d'intégration de N_3 , à trouver pour cette intégrale une valeur numérique de beaucoup supérieure à celles qui pourront être obtenues dans les cas réels.

Or, en faisant cette hypothèse, et en évaluant N_3 au moyen des quadratures mécaniques, on a constaté que cette quantité ne dépassait pas

$$\begin{array}{ll} 5'' & \text{si } q < 0,5, \\ 10'' & \text{si } q < 1. \end{array}$$

Ces résultats exagérant beaucoup ceux qui sont relatifs aux cas qui peuvent se présenter pratiquement, il a paru justifié d'admettre que, jusqu'à $q=1$, le terme N_3 atteignait seulement quelques secondes d'arc, et par suite pouvait être négligé.

On s'occupera donc uniquement, dans ce qui va suivre, du calcul de N_3 pour les astres dont q dépasse l'unité.

Calcul de N_3 pour les comètes dont q est > 1 .

Pour ces comètes à forte distance périhélie, l'anomalie vraie varie beaucoup plus uniformément; en premier lieu, afin de ne pas négliger complètement l'excentricité de la planète, on supposera son mouvement circulaire et uniforme, mais décrit sur un arc ayant pour rayon la valeur a_0 du rayon vecteur r_1 , à l'époque du passage au périhélie de l'astre perturbé.

En faisant usage des notations déjà rencontrées plusieurs fois dans le cours de ce travail, et affectant de l'indice zéro les quantités relatives à l'époque $t=0$, on posera

$$\begin{aligned} n_1 &= n_0 = \frac{k}{a_0^{\frac{3}{2}}}, & V_1 &= V_0 + n_0 t, & z_0 &= \zeta_0 - \Omega, \\ A_0 &= f(z_0, \omega) & &= \cos z_0 \cos \omega + \sin z_0 \sin \omega \cos i \\ B_0 &= f\left(z_0, \omega + \frac{\pi}{2}\right) & &= -\cos z_0 \sin \omega + \sin z_0 \cos \omega \cos i \\ C_0 &= f\left(z_0 + \frac{\pi}{2}, \omega\right) & &= -\sin z_0 \cos \omega + \cos z_0 \sin \omega \cos i \\ D_0 &= f\left(z_0 + \frac{\pi}{2}, \omega + \frac{\pi}{2}\right) & &= \sin z_0 \sin \omega + \cos z_0 \cos \omega \cos i \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} \quad (\text{voir p. 12}),$$

et, en outre,

$$\begin{aligned} n_0 t = \theta, \quad V_0 - \zeta_0 = \vartheta_0, \quad x = r \cos v, \quad y = r \sin v, \\ I_0 = f(z_0 + \vartheta_0, \omega) &= \cos \vartheta_0 A_0 + \sin \vartheta_0 C_0, \\ J_0 = f\left(z_0 + \vartheta_0, \omega + \frac{\pi}{2}\right) &= \cos \vartheta_0 B_0 + \sin \vartheta_0 D_0, \\ K_0 = f\left(z_0 + \vartheta_0 + \frac{\pi}{2}, \omega\right) &= \cos \vartheta_0 C_0 - \sin \vartheta_0 A_0, \\ L_0 = f\left(z_0 + \vartheta_0 + \frac{\pi}{2}, \omega + \frac{\pi}{2}\right) &= \cos \vartheta_0 D_0 - \sin \vartheta_0 B_0, \end{aligned}$$

I_0, J_0, K_0, L_0 pouvant être calculés directement à l'aide de la Table I et d'ailleurs vérifiés à l'aide de

$$I_0 L_0 - J_0 K_0 = \cos i \quad (1).$$

L'intégrale qu'il s'agit d'évaluer prendra la forme

$$N_3 = pm_1 a_0 \int_0^{\theta_2} \frac{x(K_0 \cos \theta - I_0 \sin \theta) + y(L_0 \cos \theta - J_0 \sin \theta)}{\{a_0^2 + r^2 - 2a_0[x(I_0 \cos \theta + K_0 \sin \theta) + y(J_0 \cos \theta + L_0 \sin \theta)]\}^{\frac{3}{2}}} d\theta.$$

Mais l'angle θ reste toujours inférieur à 20° dans les limites d'intégration; aussi pourra-t-on simplifier encore le calcul en posant

$$\begin{aligned} \cos \theta &= 1, \\ \sin \theta &= 0, \end{aligned}$$

de sorte qu'en résumé on aura

$$(44) \quad \begin{cases} N_3 = pm_1 a_0 \int_0^{\theta_2} \frac{S}{M^2} d\theta, \\ \text{avec} \\ S = x(K_0 - I_0 \theta) + y(L_0 - J_0 \theta), \\ M = \rho^2 = a_0^2 + r^2 - 2a_0[x(I_0 + K_0 \theta) + y(J_0 + L_0 \theta)]. \end{cases}$$

(1) Si l'on remarque que l'angle ϑ_0 ne peut dépasser $5^\circ 30'$, on pourra même utiliser, avec une exactitude suffisante, les formules simplifiées

$$(43) \quad \begin{cases} I_0 = A_0 + \vartheta_0 C_0, \\ J_0 = B_0 + \vartheta_0 D_0, \\ K_0 = C_0 - \vartheta_0 A_0, \\ L_0 = D_0 - \vartheta_0 B_0. \end{cases}$$

La quantité ϑ_0 est d'ailleurs fournie par la Table IV (p. 134).

Il serait alors possible de ramener le calcul approximatif de N_3 à celui d'intégrales elliptiques, en suivant la méthode élégante préconisée par M. Poincaré (voir *Bulletin astronomique*, 1900); mais comme il s'agit, dans le cas actuel, d'un terme de peu d'importance, il a paru plus rapide de remplacer simplement la fonction

$$g(\theta) = \frac{S}{M^{\frac{3}{2}}}$$

par son développement en série de Maclaurin procédant suivant les puissances de θ et limité à la forme

$$g(\theta) = g(0) + \theta g'(0) + \frac{\theta^2}{2} g''(0),$$

de sorte que l'intégration donne

$$(45) \quad N_3 = pm_1 a_0 \theta_2 \left[g(0) + \frac{\theta_2}{2} g'(0) + \frac{\theta_2^2}{6} g''(0) \right].$$

Il reste à évaluer $g(0)$, $g'(0)$, $g''(0)$.

On a, en premier lieu,

$$\begin{aligned} g(0) &= \frac{S(0)}{M(0)^{\frac{3}{2}}}, \\ g'(0) &= \frac{1}{M(0)^{\frac{3}{2}}} \left[S'(0) - \frac{3}{2} \frac{M'(0)}{M(0)} S(0) \right], \\ g''(0) &= \frac{1}{M(0)^{\frac{3}{2}}} \left[S''(0) - 3 S'(0) \frac{M'(0)}{M(0)} - \frac{3}{2} S(0) \frac{M''(0)}{M(0)} + \frac{15}{4} S(0) \frac{M'(0)^2}{M(0)^2} \right], \end{aligned}$$

puis, en tenant compte des relations simples (p. 35),

$$\begin{aligned} x(0) &= q, & \left(\frac{dx}{d\theta} \right)_0 &= 0, & \left(\frac{d^2 x}{d\theta^2} \right)_0 &= -\frac{a_0^3}{q^2}, \\ y(0) &= 0, & \left(\frac{dy}{d\theta} \right)_0 &= \sqrt{2} q \left(\frac{a_0}{q} \right)^{\frac{3}{2}}, & \left(\frac{d^2 y}{d\theta^2} \right)_0 &= 0, \\ (r^2)_0 &= q^2, & \left[\frac{d(r^2)}{d\theta} \right]_0 &= 0, & \left[\frac{d^2(r^2)}{d\theta^2} \right]_0 &= 2 a_0 q \left(\frac{a_0}{q} \right)^2, \end{aligned}$$

on en déduit aisément

$$\begin{aligned} S(0) &= K_0 q, \\ S'(0) &= \sqrt{2} q \left(\frac{a_0}{q} \right)^{\frac{3}{2}} L_0 - q I_0, \end{aligned}$$

F.

$$\begin{aligned}
S''(o) &= \frac{-a_0^3}{q^2} K_0 - 2\sqrt{2} q \left(\frac{a_0}{q}\right)^{\frac{3}{2}} J_0, \\
M(o) &= \rho_0^2 = a_0^2 + q^2 - 2a_0 q I_0 \quad (\text{déjà calculé au § 11}), \\
M'(o) &= -2a_0 \left[K_0 q + \sqrt{2} q \left(\frac{a_0}{q}\right)^{\frac{3}{2}} J_0 \right], \\
M''(o) &= 2a_0 q \left(\frac{a_0}{q}\right)^2 + 2a_0 \left[\frac{a_0^3}{q^2} I_0 - 2\sqrt{2} q \left(\frac{a_0}{q}\right)^{\frac{3}{2}} L_0 \right].
\end{aligned}$$

Si l'on pose alors

$$\left(\frac{a_0}{q}\right)^{\frac{1}{2}} = \mu,$$

il vient

$$(46) \quad \begin{cases} S(o) = K_0 q, \\ S'(o) = q(\sqrt{2} \mu^3 L_0 - I_0), \\ S''(o) = -q \mu^3 (K_0 \mu^3 + 2\sqrt{2} J_0), \\ M(o) = \rho_0^2, \\ M'(o) = -2a_0 q (K_0 + \sqrt{2} \mu^3 J_0), \\ M''(o) = 2a_0 q (\mu^6 I_0 + \mu^4 - 2\sqrt{2} \mu^3 L_0). \end{cases}$$

Enfin, en substituant ces différents résultats dans la relation (45), on obtient, après quelques simplifications,

$$(47) \quad N_3 = \frac{pm_1 a_0 \theta_2}{\rho_0^3} \left[\left(S_0 + \frac{\theta_2 S'_0}{2} \right) \left(1 - \frac{M'_0}{\rho_0^2} \theta_2 \right) + \frac{\theta_2 S_0}{4\rho_0^2} (M'_0 - \theta_2 M'') + \frac{\theta_2^2}{24} \left(4S''_0 + 15S_0 \frac{M_0'^2}{\rho_0^4} \right) \right],$$

où l'on a écrit S_0 au lieu de $S(o)$, S'_0 au lieu de $S'(o)$, etc.

Les formules (46) et (47) résolvent la question.

Le paragraphe suivant sera consacré à montrer que la partie de l'intégrale N_2 dont on n'a pas tenu compte est négligeable.

11. — *Étude de la partie de l'intégrale N_2 dont il n'a pas été tenu compte dans le paragraphe 9.*

On a évalué N_2 en remplaçant la limite inférieure d'intégration $-\infty$ par une limite finie $(t_1 - T)$; de ce fait on a négligé la quantité

$$X = -pm_1 a_1 \int_{-\infty}^{t_1 - T} \frac{F}{M^{\frac{3}{2}}} n_1 dt;$$

or, dans le cas actuel (où la planète est Jupiter), r dépasse 30 à l'époque $(t_1 - T)$, et l'on peut développer $\frac{1}{M^{\frac{3}{2}}}$ suivant les puissances de $\frac{a_1}{r}$ en négligeant les termes d'ordre supérieur au premier, ce qui donne

$$(48) \quad X = -pm_1 a_1 \int_{-\infty}^{t_1 - T} [\cos(V_1 - \Omega) \sin(\omega + \nu) \cos i - \sin(V_1 - \Omega) \cos(\omega + \nu)] \\ \times \left\{ 1 + \frac{3a_1}{r} [\cos(V_1 - \Omega) \cos(\omega + \nu) + \sin(V_1 - \Omega) \sin(\omega + \nu) \cos i] \right\} \frac{n_1 dt}{r^2}.$$

On se contentera de montrer que l'intégrale X étendue à toute la période de révolution de la planète antérieure à l'époque $(t_1 - T)$ est négligeable.

On posera

$$t_\mu = t_1 - \frac{3T}{2}, \quad V_1 - \Omega = z_\mu + l, \quad l = n_1(t - t_\mu);$$

d'où

$$dl = n_1 dt,$$

et l'on affectera de l'indice μ les quantités relatives à l'époque intermédiaire t_μ .

Comme on peut le constater dans le Tableau suivant, ν varie très lentement au voisinage de l'époque t_μ qui précède d'environ 20 années le moment du passage au périhélie.

$q.$	Valeurs de ν :		
	1° pour	2° pour	3° pour
	$t = -5100$ jours.	$t = -7265$ jours. (voisinage de t_μ).	$t = -9430$ jours.
0,5	— 165,7 ⁰	— 167,3 ⁰	— 168,4 ⁰
1,0	— 159,5	— 161,9	— 163,4
1,5	— 154,7	— 157,6	— 159,6
2,0	— 150,4	— 154,0	— 156,2
2,5	— 146,6	— 150,6	— 153,3

Il sera donc permis d'admettre, en posant $\left(\frac{dv}{dl_i}\right)_\mu = \beta$,

$$v = v_\mu + \beta l, \quad u = u_\mu + \beta l,$$

et, comme βl ne dépasse pas 4° dans les limites d'intégration, on peut remplacer

$$\begin{array}{lll} \cos \beta l & \text{par} & 1, \\ \sin \beta l & \text{par} & \beta l. \end{array}$$

Si l'on adopte alors, pour simplifier, les notations suivantes :

$$\begin{aligned} E &= \cos z_\mu \cos u_\mu + \sin z_\mu \sin u_\mu \cos i, \\ G &= -\cos z_\mu \sin u_\mu + \sin z_\mu \cos u_\mu \cos i, \\ H &= -\sin z_\mu \cos u_\mu + \cos z_\mu \sin u_\mu \cos i, \\ I &= \sin z_\mu \sin u_\mu + \cos z_\mu \cos u_\mu \cos i, \end{aligned}$$

on pourra déjà transformer comme il suit la relation (48) :

$$\begin{aligned} X &= -pm_1 a_1 \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{1}{r^2} (H \cos l - E \sin l + I \beta l \cos l - G \beta l \sin l) \\ &\quad \times \left[1 + \frac{3a_1}{r} (E \cos l + H \sin l + G \beta l \cos l + I \beta l \sin l) \right] dl \end{aligned}$$

ou, en négligeant les termes en $(\beta l)^2$,

$$\begin{aligned} X &= -pm_1 a_1 \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{1}{r^2} \left\{ H \cos l - E \sin l + I \beta l \cos l - G \beta l \sin l \right. \\ &\quad \left. + \frac{3a_1}{r} \left[EH \cos 2l + \frac{H^2 - E^2}{2} \sin 2l \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (EI + GH) \beta l \cos 2l + (HI - EG) \beta l \sin 2l \right] \right\} dl; \end{aligned}$$

d'autre part,

$$\frac{1}{r} = \frac{1 + \cos v}{p} = \frac{1 + \cos v_\mu}{p} - \frac{\beta l \sin v_\mu}{p} = \frac{2 \cos^2 \frac{v_\mu}{2}}{p} - \frac{\beta l \sin v_\mu}{p}$$

et

$$2 \cos^2 \frac{v_\mu}{2} \text{ est inférieur à } 0,1, \text{ si } q \text{ ne dépasse pas } 2,$$

de sorte qu'on peut négliger les termes en $2\beta l \cos^2 \frac{v_\mu}{2}$ et écrire

$$\begin{aligned} X = -pm_1 a_1 \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{1}{r^2} \left[H \cos l - E \sin l + l \beta \cos l - G \beta l \sin l \right. \\ \left. + \frac{6a_1}{p} EH \cos^2 \frac{v_\mu}{2} \cos 2l + \frac{3a_1}{p} (H^2 - E^2) \cos^2 \frac{v_\mu}{2} \sin 2l \right. \\ \left. - \frac{3a_1}{p} EH l \beta \sin v_\mu \cos 2l - \frac{3a_1}{p} \frac{H^2 - E^2}{2} \beta l \sin v_\mu \sin 2l \right] dl. \end{aligned}$$

Ensuite, remplaçant

$$\frac{1}{r^2} = \left(\frac{1 + \cos v_\mu - \beta l \sin v_\mu}{p} \right)^2 = \frac{(2 \cos^2 \frac{v_\mu}{2} - \beta l \sin v_\mu)^2}{p^2}$$

par

$$\frac{1}{r^2} = \frac{4 \cos^4 \frac{v_\mu}{2}}{p^2} - \frac{4 \beta l \sin v_\mu \cos^2 \frac{v_\mu}{2}}{p^2} = \frac{4 \cos^3 \frac{v_\mu}{2}}{p^2} \left(\cos \frac{v_\mu}{2} - 2 \beta l \sin \frac{v_\mu}{2} \right),$$

on obtiendra

$$\begin{aligned} (49) \quad X = \frac{-4 \cos^3 \frac{v_\mu}{2} m_1 a_1}{p} \int_{-\pi}^{+\pi} \left[H \cos \frac{v_\mu}{2} \cos l - E \cos \frac{v_\mu}{2} \sin l \right. \\ \left. + \left(I \cos \frac{v_\mu}{2} - 2 H \sin \frac{v_\mu}{2} \right) \beta l \cos l \right. \\ \left. + \left(2 \sin \frac{v_\mu}{2} E - G \cos \frac{v_\mu}{2} \right) \beta l \sin l \right. \\ \left. + \frac{6a_1}{p} EH \cos^3 \frac{v_\mu}{2} \cos 2l \right. \\ \left. + \frac{3a_1}{p} (H^2 - E^2) \cos^3 \frac{v_\mu}{2} \sin 2l \right. \\ \left. - \frac{18a_1}{p} \cos^2 \frac{v_\mu}{2} \sin \frac{v_\mu}{2} EH \beta l \cos 2l \right. \\ \left. - \frac{9a_1}{p} \cos^2 \frac{v_\mu}{2} \sin \frac{v_\mu}{2} (H^2 - E^2) \beta l \sin 2l \right] dl. \end{aligned}$$

Mais on trouve aisément les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{+\pi} \cos l \, dl &= 0, & \int_{-\pi}^{+\pi} \sin l \, dl &= 0, & \int_{-\pi}^{+\pi} l \cos l \, dl &= 0, \\ \int_{-\pi}^{+\pi} l \sin l \, dl &= 2\pi, & \int_{-\pi}^{+\pi} \cos 2l \, dl &= 0, & \int_{-\pi}^{+\pi} \sin 2l \, dl &= 0, \\ \int_{-\pi}^{+\pi} l \cos 2l \, dl &= 0, & \int_{-\pi}^{+\pi} l \sin 2l \, dl &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{+\pi} x \sin x \, dx = -\pi, \end{aligned}$$

de sorte qu'en substituant dans (49), on obtient simplement :

$$X = \frac{-4 \cos^3 \frac{v_\mu}{2} m_1 a_1 \beta \pi}{p} \left[4E \sin \frac{v_\mu}{2} - 2G \cos \frac{v_\mu}{2} + \frac{9a_1}{p} \cos^2 \frac{v_\mu}{2} \sin \frac{v_\mu}{2} (H^2 - E^2) \right]$$

ou, comme $\beta = \frac{a_1^{\frac{3}{2}} \sqrt{p}}{(r_\mu)^2} = \frac{4 \cos^4 \frac{v_\mu}{2} a_1^{\frac{3}{2}}}{p^{\frac{3}{2}}}$,

$$(50) \quad X = - \frac{16 \cos^7 \frac{v_\mu}{2}}{p^{\frac{5}{2}}} m_1 a_1^{\frac{5}{2}} \pi \left[4E \sin \frac{v_\mu}{2} - 2G \cos \frac{v_\mu}{2} + \frac{9a_1}{p} \cos^2 \frac{v_\mu}{2} \sin \frac{v_\mu}{2} (H^2 - E^2) \right].$$

Il reste à examiner quelle peut être la valeur numérique maxima de X.

Tout d'abord, on a

$$\begin{aligned} \log 16 m_1 a_1^{\frac{5}{2}} \pi &= 0,47182, \\ \log 9 a_1 &= 1,67047. \end{aligned}$$

Comme la plus grande valeur numérique de E, G ou $(H^2 - E^2)$ est l'unité, on arrive aux résultats suivants :

q .	Valeur numérique maxima pour X.
0,5	0,6
1,0	1,2
1,5	1,9
2,0	2,6
2,5	3,4

ce qui justifie la façon de procéder employée.

12. — Comparaison des résultats approchés fournis par la méthode précédente avec ceux obtenus par les quadratures mécaniques.

Avant d'appliquer aux comètes connues la méthode qui vient d'être exposée (ce qui constituera la seconde Partie de ce travail) et afin d'estimer le degré de précision des résultats qu'elle peut fournir, on a effectué le calcul, par quadratures mécaniques, des perturbations du premier ordre produites par Jupiter sur l'excentricité des sept astres qui suivent :

Comètes 1845 I, 1847 II, 1863 VI, 1889 I, 1892 II, 1898 VII, 1899 I.

Voici les résultats obtenus :

1^o COMÈTE 1843 I.

Les quadratures fournissent les valeurs suivantes :

1^o Perturbations de 320 jours en 320 jours.

2^o Perturbations de 40 jours en 40 jours.

Dates.	${}^1f.$	$f = \delta e.$	Dates.	${}^1f.$	$f = \delta e.$
1827. Mars 28...	-411,12	- 2,29	1840. Mai 18...	-412,973	+ 1,099
1828. Févr. 11...	-413,41	+ 2,88	Juin 27...	-411,874	+ 1,257
1828. Déc. 27...	-410,53	+ 8,10	Août 6...	-410,617	+ 1,418
1829. Nov. 12...	-402,43	+12,62	Sept. 15...	-409,199	+ 1,583
1830. Sept. 28...	-389,81	+16,27	Oct. 25...	-407,616	+ 1,753
1831. Août 14...	-373,54	+14,95	Déc. 4...	-405,863	+ 1,928
1832. Juin 29...	-358,59	+10,60	1841. Janv. 13...	-403,935	+ 2,107
1833. Mai 15...	-347,99	+ 2,93	Févr. 22...	-401,828	+ 2,293
1834. Mars 31...	-345,06	- 5,71	Avril 3...	-399,535	+ 2,486
1835. Févr. 14...	-350,77	-12,57	Mai 13...	-397,049	+ 2,686
1835. Déc. 31...	-363,34	-16,04	Juin 22...	-394,363	+ 2,895
1836. Nov. 15...	-379,38	-15,93	Août 1...	-391,468	+ 3,114
1837. Oct. 1...	-395,31	-12,99	Sept. 10...	-388,354	+ 3,344
1838. Août 17...	-408,30	- 7,49	Oct. 20...	-385,010	+ 3,588
1839. Juillet 3...	-415,79	- 0,22	Nov. 29...	-381,422	+ 3,853
1840. Mai 18...	-416,01	+ 8,79	1842. Janv. 8...	-377,569	+ 4,140
	-407,22		Févr. 17...	-373,429	+ 4,455
			Mars 29...	-368,974	+ 4,805
			Mai 8...	-364,169	+ 5,201
			Juin 17...	-358,968	+ 5,669
			Juillet 27...	-353,299	+ 6,211
			Sept. 5...	-347,088	+ 6,872
			Oct. 15...	-340,216	+ 7,691
			Nov. 24...	-332,525	+ 8,737
			1843. Janv. 3...	-323,788	+10,112
			Févr. 12...	-313,676	+11,900
			Mars 24...	-301,776	+14,597
			Mai 3...	-287,179	+18,393
			Juin 12...	-268,786	+24,088
			Juillet 22...	-244,698	+32,818
			Août 31...	-211,880	+46,125
			Oct. 10...	-165,755	+64,302
			Nov. 19...	-101,453	+79,725
			Déc. 29...	- 21,728	+71,120
			1844. Févr. 7...	+ 49,392	+31,091
			Mars 18...	+ 80,483	- 1,602
			Avril 27...	+ 78,881	-14,687
			Juin 6...	+ 64,194	-16,922
			Juillet 16...	+ 47,272	-15,399
			Août 25...	+ 31,873	-14,064
			Oct. 4...	+ 17,809	-10,052
			Nov. 13...	+ 7,757	- 6,616
			Déc. 23...	+ 1,141	- 1,404
			1845. Févr. 1...	- 0,263	+ 2,867
			Mars 13...	+ 2,604	+ 3,184
				+ 5,788	

Ce qui donne, pour $\Delta(e)$, un résultat voisin de $+380''$; on verra plus loin que la méthode abrégée conduit à $\Delta(e) = +418''$ (voir p. 85).

2° COMÈTE 1847 II.

Voici ce que donnent les quadratures :

1° Perturbations de 320 jours en 320 jours.

Dates.	$^1f.$	$f = \delta e.$
1824. Déc. 8...	-134",51	-18",89
1825. Oct. 24...	-153,40	-22,84
1826. Sept. 9...	-176,24	-22,23
1827. Juillet 26...	-198,47	-19,44
1828. Juin 10...	-217,91	-12,19
1829. Avril 26...	-230,10	-1,99
1830. Mars 12...	-232,09	+10,18
1831. Janv. 26...	-221,91	+22,29
1831. Déc. 12...	-199,62	+30,86
1832. Oct. 27...	-168,76	+32,97
1833. Sept. 12...	-135,79	+24,75
1834. Juillet 29...	-111,04	+11,14
1835. Juin 14...	-99,90	-4,67
1836. Avril 29...	-104,57	-17,47
1837. Mars 15...	-122,04	-25,42
1838. Janv. 29...	-147,46	-27,98
1838. Déc. 15...	-175,44	-25,36
	-200,80	

2° Perturbations de 80 jours en 80 jours.

Dates.	$^1f.$	$f = \delta e.$	Dates.	$^1f.$	$f = \delta e.$
1838. Janv. 29...	-157",957	-6",994	1842. Nov. 24...	-189",426	+9",299
Avril 19...	-164,951	-6,949	1843. Févr. 12...	-180,127	+10,282
Juillet 8...	-171,900	-6,824	Mai 3...	-169,845	+11,161
Sept. 26...	-178,724	-6,620	Juillet 22...	-158,684	+11,912
Déc. 15...	-185,344	-6,340	Oct. 10...	-146,772	+12,511
1839. Mars 5...	-191,684	-5,984	Déc. 29...	-134,261	+12,929
Mai 24...	-197,668	-5,552	1844. Mars 18...	-121,332	+13,156
Août. 12...	-203,220	-5,045	Juin 6...	-108,176	+13,171
Oct. 31...	-208,265	-4,466	Août 25...	-95,005	+12,968
1840. Janv. 19...	-212,731	-3,815	Nov. 13...	-82,037	+12,543
Avril 8...	-216,546	-3,091	1845. Févr. 1...	-69,494	+11,898
Juin 27...	-219,637	-2,298	Avril 22...	-57,596	+11,047
Sept. 15...	-221,935	-1,439	Juillet 11...	-46,549	+10,008
Déc. 4...	-223,374	-0,515	Sept. 29...	-36,541	+8,803
1841. Févr. 22...	-223,889	+0,466	Déc. 18...	-27,738	+7,476
Mai 13...	-223,423	+1,503	1846. Mars 8...	-20,262	+6,071
Août. 1...	-221,920	+2,584	Mai 27...	-14,191	+4,665
Oct. 20...	-219,336	+3,702	Août 15...	-9,526	+3,367
1842. Janv. 8...	-215,634	+4,843	Nov. 3...	-6,159	+2,347
Mars 29...	-210,791	+5,991	1847. Janv. 22...	-3,812	+1,800
Juin 17...	-204,800	+7,131	Avril 12...	-2,012	+2,184
Sept. 5...	-197,669	+8,243	Juillet 1...	+0,172	-1,692
Nov. 24...	-189,426	+9,299	Sept. 19...	-1,520	-6,406
	-180,127			-7,926	

On obtient ainsi $\Delta(e)$ voisin de $+185''$, alors que le calcul approché conduit à $\Delta(e) = +221''$ (voir p. 85).

3° COMÈTE 1863 VI.

Voici les résultats des quadratures :

1° *Perturbations de 360 jours en 360 jours.*

2° *Perturbations de 40 jours en 40 jours.*

Dates.	$^1f.$	$f = \delta e.$	Dates.	$^1f.$	$f = \delta e.$
1845. Juillet 31...	— 94,17	+ 4,43	1862. Mai 3...	— 18,71	+ 1,86
1846. Juillet 26...	— 89,74	+ 3,09	Juin 12...	— 16,85	+ 1,85
1847. Juillet 21...	— 86,65	— 0,21	Juillet 22...	— 15,00	+ 1,83
1848. Juillet 15...	— 86,86	— 0,68	Août 31...	— 13,17	+ 1,80
1849. Juillet 10...	— 87,54	— 2,07	Oct. 10...	— 11,37	+ 1,75
1850. Juillet 5...	— 89,61	— 3,13	Nov. 19...	— 9,62	+ 1,70
1851. Juin 30...	— 92,74	— 3,01	Déc. 29...	— 7,92	+ 1,62
1852. Juin 24...	— 95,75	— 3,50	1863. Févr. 7...	— 6,30	+ 1,52
1853. Juin 19...	— 99,25	— 1,31	Mars 19...	— 4,78	+ 1,40
1854. Juin 14...	— 100,56	+ 0,78	Avril 28...	— 3,38	+ 1,24
1855. Juin 9...	— 99,78	+ 3,59	Juin 7...	— 2,14	+ 1,02
1856. Juin 3...	— 96,19	+ 6,66	Juillet 17...	— 1,12	+ 0,76
1857. Mai 29...	— 89,53	+ 9,31	Août 26...	— 0,36	+ 0,40
1858. Mai 24...	— 80,22	+ 10,80	Oct. 5...	+ 0,04	— 0,02
1859. Mai 19...	— 69,42	+ 12,72	Nov. 14...	+ 0,02	— 0,42
1860. Mai 13...	— 56,70	+ 14,40	1863. Déc. 24...	— 0,40	— 0,49
1861. Mai 8...	— 42,30	+ 16,17		— 0,89	
1862. Mai 3...	— 26,13	+ 16,74			
	— 9,39				

Cela fournit pour $\Delta(e)$ une valeur voisine de $+ 94''$, tandis que la méthode approchée donne $+ 107''$ (*voir* p. 85).

4° COMÈTE 1889 I.

Les quadratures donnent :

1° *Perturbations de 320 jours en 320 jours.*

Dates.	$^1f.$	$f = \delta e.$
1869. Oct. 12...	— 283,12	— 27,41
1870. Août 29...	— 310,53	— 12,49
1871. Juillet 15...	— 323,02	+ 4,37
1872. Mai 30...	— 318,65	+ 19,04
1873. Avril 15...	— 299,61	+ 29,22
1874. Mars 1...	— 270,39	+ 34,08
1875. Janv. 15...	— 236,31	+ 33,40
1875. Déc. 1...	— 202,91	+ 27,24
1876. Oct. 6...	— 175,67	+ 15,56
1877. Sept. 1...	— 160,11	— 0,98
1878. Juillet 18...	— 161,09	— 20,18
1879. Juin 3...	— 181,27	— 37,59
1880. Avril 18...	— 218,86	— 46,44
	— 265,30	

2° Perturbations de 80 jours en 80 jours.

Dates.	δf .	$f = \delta e$.	Dates.	δf .	$f = \delta e$.
1880. Avril 18...	-235,912	-11,611	1884. Nov. 23...	-261,055	+17,412
Juillet 7...	-247,523	-11,660	1885. Févr. 11...	-243,643	+19,416
Sept. 25...	-259,183	-11,478	Mai 2...	-224,227	+20,919
Déc. 14...	-270,661	-11,074	Juillet 21...	-203,308	+21,997
1881. Mars 4...	-281,735	-10,440	Oct. 9...	-181,311	+22,372
Mai 23...	-292,175	-9,750	Déc. 28...	-158,939	+22,630
Août 11...	-301,925	-8,546	1886. Mars 18...	-136,909	+21,173
Oct. 30...	-310,471	-7,323	Juin 6...	-115,736	+20,060
1882. Janv. 18...	-317,794	-5,942	Août 25...	-95,676	+18,862
Avril 8...	-323,736	-4,442	Nov. 13...	-76,814	+17,682
Juin 27...	-328,178	-2,810	1887. Févr. 1...	-59,132	+16,463
Sept. 15...	-330,988	-1,154	Avril 22...	-42,669	+15,167
Déc. 4...	-332,142	+0,585	Juillet 11...	-27,502	+13,702
1883. Févr. 22...	-331,557	+2,361	Sept. 29...	-13,800	+11,945
Mai 13...	-329,196	+4,128	Déc. 18...	-1,855	+9,656
Août 1...	-325,068	+5,978	1888. Mars 7...	+7,801	+6,907
Oct. 20...	-319,090	+7,796	Mai 26...	+14,708	+3,027
1884. Janv. 8...	-311,294	+9,659	Août 14...	+17,735	-2,431
Mars 28...	-301,635	+11,555	Nov. 2...	+15,304	-9,636
Juin 16...	-290,080	+13,483	1889. Janv. 21...	+5,668	-10,910
Sept. 4...	-276,597	+15,542	Avril 11...	+5,242	-0,533
1884. Nov. 23...	-261,055	+17,412		-5,775	
	-243,643				

Cela fournit un $\Delta(e)$ voisin de $+244''$; avec la méthode abrégée, on a obtenu $+263''$ (voir p. 86).

5° COMÈTE 1892 II.

Cette comète a été étudiée plus particulièrement et a fait l'objet d'une Note publiée par nous dans le *Bulletin Astronomique*, t. XVII, p. 104.

Dans ce travail, on avait trouvé $\Delta(e) = +400''$; la méthode abrégée donne $+406''$ (voir p. 86).

6° COMÈTE 1898 VII.

Les quadratures ont donné :

1° Perturbations de 400 jours en 400 jours.			2° Perturbations de 80 jours en 80 jours.		
Dates.	δf .	$f = \delta e$.	Dates.	δf .	$f = \delta e$.
1870. Févr. 10...	-195,67	+11,89	1894. Mars 16...	-167,03	+4,39
1871. Mars 17...	-183,78	+19,52	Juin 4...	-162,64	+5,07
1872. Avril 20...	-164,26	+19,64	Août 23...	-157,57	+5,72
1873. Mai 25...	-144,62	+14,59	Nov. 11...	-151,85	+6,33
1874. Juin 29...	-130,03	+6,38	1895. Janv. 30...	-145,52	+6,90
1875. Août 3...	-123,65	-3,22	Avril 20...	-138,62	+7,43
1876. Sept. 6...	-126,87	-12,60	Juillet 9...	-131,19	+7,93
1877. Oct. 11...	-139,47	-19,46	Sept. 27...	-123,26	+8,41
1878. Nov. 15...	-158,93	-20,53	Déc. 16...	-114,85	+8,88
1879. Déc. 20...	-179,46	-13,18	1896. Mars 5...	-105,97	+9,35
1881. Janv. 23...	-192,64	+0,98	Mai 24...	-96,62	+9,84
1882. Févr. 27...	-191,66	+15,22	Août 12...	-86,78	+10,35
1883. Avril 3...	-176,44	+23,19	Oct. 31...	-76,43	+10,88
1884. Mai 7...	-153,25	+23,62	1897. Janv. 19...	-65,55	+11,41
1885. Juin 11...	-129,63	+18,15	Avril 9...	-54,14	+11,88
1886. Juillet 16...	-111,48	+9,06	Juin 28...	-42,26	+12,10
1887. Août 20...	-102,42	-1,94	Sept. 16...	-30,16	+11,71
1888. Sept. 23...	-104,36	-13,09	Déc. 5...	-18,45	+9,98
1889. Oct. 28...	-117,45	-21,58	1898. Févr. 23...	-8,47	+6,58
1890. Déc. 2...	-139,03	-23,31	Mai 14...	+1,89	+1,98
1892. Janv. 6...	-162,34	-14,78	Août 2...	+0,09	-0,04
1893. Févr. 9...	-177,12	+2,72	1898. Oct. 21...	+0,05	+3,05
1894. Mars 16...	-174,40	+21,95		+3,10	
	-152,45				

Soit une valeur de $\Delta(e)$ à peu près égale à $+164''$, tandis que la méthode approchée conduit à $+166''$ (*voir* p. 87).

7° COMÈTE 1899 I.

En calculant par quadratures, on a obtenu :

1° *Perturbations de 400 jours en 400 jours.* 2° *Perturbations de 80 jours en 80 jours.*

Dates.	δf .	$f = \delta e$.	Dates.	δf .	$f = \delta e$.
1872. Avril 20...	$-59,52$	$+2,16$	1895. Avril 20...	$-63,61$	$+0,38$
1873. Mai 25...	$-57,36$	$+4,86$	Juillet 9...	$-63,23$	$+0,73$
1874. Juin 29...	$-52,50$	$+6,13$	Sept. 27...	$-62,50$	$+1,11$
1875. Août 3...	$-46,37$	$+5,89$	Déc. 16...	$-61,39$	$+1,51$
1876. Sept. 6...	$-40,48$	$+4,07$	1896. Mars 5...	$-59,88$	$+1,94$
1877. Oct. 11...	$-36,41$	$+0,73$	Mai 24...	$-57,94$	$+2,42$
1878. Nov. 15...	$-35,68$	$-3,54$	Août 12...	$-55,52$	$+3,00$
1879. Déc. 20...	$-39,22$	$-7,10$	Oct. 31...	$-52,52$	$+3,72$
1881. Janv. 23...	$-46,32$	$-7,89$	1897. Janv. 19...	$-48,80$	$+4,70$
1882. Févr. 27...	$-54,21$	$-5,33$	Avril 9...	$-44,10$	$+6,15$
1883. Avril 3...	$-59,54$	$-2,02$	Juin 28...	$-37,95$	$+8,32$
1884. Mai 7...	$-61,56$	$+3,50$	Sept. 16...	$-29,63$	$+11,18$
1885. Juin 11...	$-58,06$	$+6,57$	Déc. 5...	$-18,15$	$+12,21$
1886. Juillet 16...	$-51,49$	$+7,93$	1898. Févr. 23...	$-6,24$	$+6,72$
1887. Août 20...	$-43,56$	$+7,37$	Mai 14...	$+0,48$	$+0,50$
1888. Sept. 23...	$-36,19$	$+4,74$	Août 2...	$+0,98$	$-1,03$
1889. Oct. 28...	$-31,45$	$+0,07$	Oct. 21...	$-0,05$	$-0,48$
1890. Déc. 2...	$-31,38$	$-5,66$	1899. Janv. 9...	$-0,53$	$+0,51$
1892. Janv. 6...	$-37,04$	$-10,12$	Mars 30...	$+0,02$	$+1,19$
1893. Févr. 9...	$-47,16$	$-10,64$	1899. Juin 18...	$+1,17$	$+3,78$
1894. Mars 16...	$-57,80$	$-5,85$		$+4,95$	
1895. Avril 20...	$-63,65$	$+1,90$			
	$-61,75$				

D'où l'on conclut $\Delta(e)$ voisin de $+48''$, alors que le calcul approché donne $\Delta(e) = +59''$ (*voir* p. 87).

Voici le résumé des comparaisons qui précèdent :

Astre.	$\Delta(e)$.		$(a-b)$.
	Par	Par la méthode	
	les quadratures (a).	approchée (b).	
Comète 1845 I.....	$+380''$	$+418''$	$-38''$
Comète 1847 II.....	$+185$	$+221$	-36
Comète 1863 VI.....	$+94$	$+107$	-13
Comète 1889 I.....	$+244$	$+263$	-19
Comète 1892 II.....	$+400$	$+406$	-6
Comète 1898 VII.....	$+164$	$+166$	-2
Comète 1899 I.....	$+48$	$+59$	-11

La considération de ce Tableau montre, non seulement que les écarts ne sont pas excessifs, mais encore qu'ils sont tous de même signe, ce qui était à

prévoir, puisque les calculs par quadratures de ce paragraphe ne sont pas poussés très loin. Les résultats de la colonne (*a*) se trouveraient probablement augmentés si l'on continuait jusqu'à des dates beaucoup plus éloignées du passage au périhélie.

On peut se rendre compte, en effet, que l'accord est déjà meilleur pour les trois comètes 1892 II, 1898 VII et 1899 I, dont le calcul par quadratures porte sur plus de 25 années.



DEUXIÈME PARTIE.

APPLICATIONS NUMÉRIQUES RELATIVES AUX PERTURBATIONS DUES A L'ACTION DE JUPITER

1. — *Tableau des astres choisis.*

On a appliqué la méthode abrégée exposée précédemment à un grand nombre de comètes, dont on donne le Tableau ci-après (p. 58 et suivantes), et qui ont été choisies en tenant compte des considérations suivantes.

Afin d'éviter une erreur trop considérable due à l'emploi des formules du mouvement parabolique, on n'a retenu que des astres dont l'excentricité a été trouvée supérieure à 0,9985; et même, sur près de 150 comètes choisies, il y en a seulement 11 où e n'atteint pas 0,9995.

On avait d'abord songé à ne prendre que les comètes dont on possédait une orbite définitive et basée sur un intervalle d'observations de 2 mois au moins; mais on a constaté que le nombre de ces astres atteint à peine 60; aussi a-t-on préféré, afin de pouvoir examiner des cas plus variés, étudier toutes les comètes pour lesquelles on possède une orbite (définitive ou provisoire) embrassant au minimum 15 jours d'observations.

Nous avons eu⁹ soin, toutefois, de signaler dans le Tableau, les orbites non définitives. Il est bien entendu, en particulier, que les quelques orbites antérieures à 1820 qui y figurent sont très incertaines; il ne faut attribuer aucune confiance, par exemple, aux hyperboles très prononcées qui ont été obtenues pour les comètes 1806 II et 1818 III. On ne les a signalées que pour être complet.

2. — *Calculs faits pour rapporter les éléments des comètes à l'orbite de Jupiter, pour 1900,0.*

Il a paru avantageux, pour la commodité des calculs ultérieurs, de faire choix d'un équinoxe unique; et l'on s'est décidé pour celui de 1900,0.

Les éléments écliptiques de chaque comète ont été ramenés de l'époque t ,

fournie par le calculateur, à cette date 1900,0, au moyen des formules approchées que voici, et qui sont d'ailleurs bien suffisantes dans le cas actuel :

$$(\alpha) \quad \begin{cases} \Omega_{1900} - \Omega_t = 50'', 24(1900 - t) + \pi \cot i_t \sin(\Omega_t - \Pi), \\ \omega_{1900} - \omega_t = -\pi \sin(\Omega_t - \Pi) \left(\tan \frac{i_t}{2} + \cot i_t \right), \\ i_{1900} - i_t = -\pi \cos(\Omega_t - \Pi) \end{cases}$$

avec

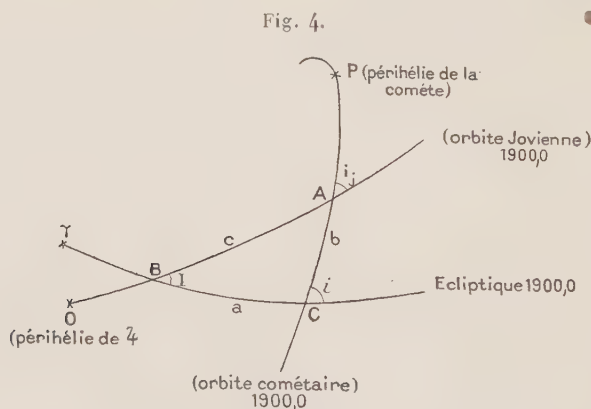
$$\pi = 0'', 479(1900 - t), \quad \Pi = 173^\circ 0' 12'' + 32'', 869 \left(\frac{1900 + t}{2} - 1850 \right).$$

Les éléments de Jupiter ont été empruntés aux Tables de Le Verrier (*Annales de l'Observatoire de Paris, Mémoires*, t. XII, p. 7) qui ont donné :

Longitude du nœud ascendant pour 1900,0.....	N = 99.26.35''
Inclinaison sur l'écliptique.....	I = 1.18.31
Argument du périhélie.....	U = -86.43.21
Excentricité de l'orbite.....	e ₁ = 9969'', 8
Masse.....	m ₁ = $\frac{1}{1047,2}$

On s'est ensuite proposé de transformer les éléments écliptiques Ω_{1900} , i_{1900} , ω_{1900} , de chaque comète, obtenus à l'aide des formules (α), de manière à déduire les quantités correspondantes Ω_j , i_j , ω_j , relatives au plan de Jupiter, pour 1900,0.

Pour effectuer cette transformation élémentaire, on a procédé comme il suit, en convenant de compter les quantités Ω_j sur le plan de l'orbite jovienne, à partir du point O (*fig. 4*), périhélie de Jupiter à l'époque 1900,0.



En représentant, pour cette date, les traces des plans de l'écliptique, de la

comète et de Jupiter sur la sphère céleste, on est conduit à résoudre un triangle sphérique ABC dans lequel on connaît

$$\begin{aligned} \text{l'angle B} &= \text{I}, \\ \text{l'angle C} &\text{égal à } (180 - i), \\ \text{le côté } a &= \gamma C - \gamma B = \Omega - N \end{aligned}$$

et où l'on doit déterminer les éléments suivants :

$$\begin{aligned} \text{le côté } c &= \Omega_j + \text{U}, \\ \text{le côté } b &= \omega - \omega_j, \\ \text{l'angle A} &\text{ou } i_j. \end{aligned}$$

Pour effectuer ce calcul, partons de la formule des cotangentes :

$$\begin{aligned} \cot c \sin a &= \cot C \sin B + \cos a \cos B, \\ \cot b \sin a &= \cot B \sin C + \cos a \cos C, \end{aligned}$$

ce qui peut s'écrire

$$\tan c = \frac{\frac{\tan a \sin C}{\cos C} \sin B + \cos B \sin C}{\frac{\cos C}{\cos a}}, \quad \tan b = \frac{\frac{\tan a \sin B}{\cos B} \sin C + \cos C \sin B}{\frac{\cos B}{\cos a}};$$

posant alors

$$\begin{aligned} \sin C &= m \cos \chi, & \sin B &= p \cos \varphi, \\ \frac{\cos C}{\cos a} &= m \sin \chi, & \frac{\cos B}{\cos a} &= p \sin \varphi, \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\cot \chi = \tan C \cos a, \quad \cot \varphi = \tan B \cos a,$$

et substituant dans ce qui précède, on obtiendra

$$\tan c = \frac{\tan a \cos \chi}{\cos(\chi - B)}, \quad \tan b = \frac{\tan a \cos \varphi}{\cos(C - \varphi)}.$$

D'autre part, la relation

$$\cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a$$

donnera ici

$$\cos A = \cos B(-\cos C + \tan B \cos a \sin C) = \frac{\cos B \sin(C - \varphi)}{\sin \varphi}$$

de sorte qu'en revenant aux quantités qu'il s'agit d'évaluer, on aura les formules suivantes dont nous avons fait usage, et qui résolvent la question.

En posant

$$\begin{aligned}\cot \chi &= -\operatorname{tang} i \cos(\Omega - N), \\ \cot \varphi &= \operatorname{tang} I \cos(\Omega - N), \\ n &= \Omega_j - 86^\circ 43' 21'',\end{aligned}$$

on obtient

$$(\beta) \quad \left\{ \begin{aligned} \operatorname{tang}(\omega_j - \omega) &= \frac{\operatorname{tang}(\Omega - N) \cos \varphi}{\cos(i + \varphi)}, \\ \operatorname{tang} n &= \frac{\operatorname{tang}(\Omega - N) \cos \chi}{\cos(\chi - I)}, \\ \cos i_j &= \frac{\cos I \sin(i + \varphi)}{\sin \varphi}. \end{aligned} \right.$$

L'angle i_j est donné par son cosinus; mais, dans le cas actuel, ce n'est pas un inconvénient, car il y a, dans les exemples dont on s'est occupé, une proportion extrêmement faible d'astres pour lesquels i est au voisinage de 0° ou 180° .

Pour distinguer sans ambiguïté le quadrant où se terminent les arcs fournis par ces relations (β) , nous avons mis à profit les remarques suivantes :

1° L'angle I étant positif et très petit, $\cot \varphi$ est très faible; et, comme, d'autre part, $\cos \varphi$ est positif, il en résulte que l'angle φ est compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$, mais excessivement voisin de l'une de ces deux valeurs;

2° $\cos \chi$ est positif, d'où $-\frac{\pi}{2} < \chi < +\frac{\pi}{2}$;

3° $\sin n$, $\sin(\omega_j - \omega)$, et $\sin(\Omega - N)$ sont tous trois de même signe, et d'ailleurs $(\omega_j - \omega)$ est un très petit angle;

4° i_j est positif, très voisin de i et inférieur à 180° .

En outre, on a vérifié les calculs de transformation à l'aide des relations

$$\begin{aligned}\sin(\Omega - N) \sin I &= \sin i_j \sin(\omega - \omega_j), \\ \sin(\Omega - N) \sin i &= \sin i_j \sin n.\end{aligned}$$

Dans tout ce qui va suivre, on utilisera uniquement les éléments Ω_j , i_j , ω_j et l'on se dispensera d'affecter ces quantités de l'indice j .

Le Tableau qui vient ci-après renferme tous les renseignements concernant les astres sur lesquels ont porté nos calculs.

Dans la première colonne nous donnons le numéro sous lequel figure la comète dans l'Ouvrage classique de M. J.-G. Galle : *Verzeichniss der Elemente der bisher berechneten Cometenbahnen*; on trouvera, dans cette précieuse publi-

cation et dans les *Vierteljahrsschrift der Astronomischen Gesellschaft*, tous les détails bibliographiques concernant chaque astre ⁽¹⁾. La seconde colonne renferme le nom de l'astre.

Les six colonnes suivantes fournissent, pour 1900,0, les éléments écliptiques de chacune des comètes.

On donne ensuite successivement : l'intervalle de temps embrassé par les observations utilisées pour le calcul de l'orbite, le nom du calculateur et les renseignements concernant la publication qui renferme ces éléments ; à ce sujet, on a fait usage des abréviations suivantes, généralement adoptées :

As. J.	Berliner Astronomisches Jahrbuch.
A. J.	The Astronomical Journal.
A. N.	Astronomische Nachrichten.
B. A.	Bulletin Astronomique.
C. des T.	Connaissance des Temps.
C. R.	Comptes Rendus hebdomadaires de l'Académie des Sciences de Paris.
M. N.	Monthly Notices of the Royal Astronomical Society.
VJS	Vierteljahrsschrift der Astronomischen Gesellschaft.

Les trois dernières colonnes numériques renferment les valeurs des éléments rapportés au plan de Jupiter, c'est-à-dire les quantités Ω_j , $\dot{e}_j$, ω_j , dont il a été question plus haut.

Enfin, on a joint une colonne de remarques, destinée principalement à spécifier les orbites qui ne peuvent être considérées comme définitives.

(1) On pourra aussi consulter avec beaucoup de profit les Notices publiées à ce sujet par M. L. Schulhof, depuis 1885, dans l'*Annuaire du Bureau des Longitudes*. Ce savant, dont la compétence sur la question des comètes est universellement reconnue, a bien voulu, à maintes reprises, nous guider de ses conseils ; ils nous ont été particulièrement précieux dans le courant du présent Travail. Aussi sommes-nous heureux de lui témoigner ici notre profonde gratitude.

N° Galle.	Nom.	Date du passage au périhélie (T. m. de Paris).	Éléments écliptiques pour 1900,0.			log q .	e .	Limites des observations utilisées.
			Ω .	i .	ω .			
104.	1771.....	Avril 19, 14144	29.38.1"	11.16.41"	76.11.11"	9,955 127	1	1771 Avril 1 à Juill.
137.	1802.....	Sept. 9, 86336	311.38.30	57.0.54	21.50.21	0,039 099	1	1802 Août 28 à Oct.
138.	1804.....	Févr. 13, 65278	178.10.7	56.43.34	332.3.41	0,030 307	1	1804 Mars 10 à Avril
141.	1806 II...	Déc. 28, 92943	323.40.36	144.56.54	225.19.2	0,034 188	1,010 1820	1806 Nov. 12 à Févr. 1
143.	1810.....	Oct. 6, 24442	310.6.8	62.56.10	114.55.39	9,986 603	1	1810 Août 29 à Sept. 2
149.	1813 I...	Mars 4, 53300	62.2.44	158.46.43	350.54.2	9,844 558	1	1813 Févr. 18 à Mars
150.	1813 II...	Mai 19, 30340	43.52.42	98.58.57	204.47.2	0,085 505	1	1813 Avril 14 à Avril 2
154.	1818 II...	Févr. 26, 25000	71.29.40	89.47.36	112.36.20	0,078 740	1	1818 Janv. 4 à Avril
153.	1818 III...	Déc. 5, 03902	91.8.59	116.59.56	348.14.13	9,931 957	1,011 617	1818 Nov. 29 à Janv. 3
157.	1819 H...	Juin 27, 72197	274.49.27	80.44.44	13.25.36	9,533 233	1	1819 Juill. 3 à Oct. 1
160.	1821.....	Mars 21, 54305	49.46.59	106.27.14	169.12.3	8,962 952	1	1821 Janv. 21 à Mai
161.	1822 I...	Mai 5, 62860	178.35.47	126.25.20	344.42.2	9,702 62	1	1822 Mai 22 à Juin 2
163.	1823.....	Déc. 9, 45058	304.6.37	103.48.26	28.28.2	9,355 073	1	1823 Déc. 30 à Févr. 1
166.	1824 I...	Juill. 11, 52532	235.24.24	125.26.18	334.5.38	9,772 081	1	1824 Juill. 14 à Août 1
167.	1824 II...	Sept. 29, 07294	280.20.12	54.35.42	85.14.39	0,021 121	1	1824 Nov. 9 à Déc. 2
168.	1825 I...	Mai 30, 57518	21.11.55	123.16.55	107.14.32	9,949 099	1,000 673	1825 Mai 19 à Juill. 1
173.	1826 II...	Août 21, 92451	198.38.49	39.59.54	279.22.31	0,302 743	1	1826 Janv. 1 à Mars 1
175.	1826 IV...	Oct. 8, 95873	45.7.29	25.56.21	13.42.59	9,930 852	1	1826 Août 9 à Nov.
177.	1827 I...	Févr. 4, 91750	185.35.46	102.24.9	151.2.12	9,704 293	1	1826 Déc. 27 à Janv. 2
178.	1827 II...	Juin 7, 84766	319.11.15	136.21.44	20.38.17	9,907 494	1	1827 Juin 20 à Juill. 2
181.	1830 I...	Avril 9, 30158	207.20.57	21.16.4	5.48.56	9,964 459	1	1830 Avril 20 à Août 1
182.	1830 II...	Déc. 27, 6669	338.51.35	135.15.3	26.53.36	9,099 982	1	1830 Janv. 20 à Mars
184.	1832 II...	Sept. 25, 58003	73.25.0	136.40.13	204.36.57	0,072 987	1	1832 Juill. 19 à Août 2
187.	1834.....	Avril 2, 79907	227.32.4	5.59.1	50.8.36	9,710 207	1	1834 Mars 21 à Avril 1
188.	1835 I...	Mars 27, 21166	59.17.54	170.52.45	210.29.19	0,309 663	1	1835 Avril 20 à Mai 2
192.	1840 I...	Janv. 4, 47816	120.47.35	53.5.16	72.14.48	9,791 292	0,999 9128	1839 Déc. 2 à Févr.
194.	1840 III...	Avril 2, 44431	186.52.28	79.51.50	138.2.49	9,874 194	1	1840 Mars 6 à Mars 2
197.	1842 H...	Déc. 15, 96329	208.37.14	106.25.34	240.32.3	9,702 767	1	1842 Oct. 28 à Nov. 2
199.	1843 II...	Mars 6, 06242	158.2.32	52.44.20	124.15.1	0,208 532	1,000 1798	1843 Mai 3 à Sept.
202.	1844 II...	Oct. 17, 35041	32.25.24	131.24.20	211.15.25	9,932 164	0,999 6083	1844 Juill. 17 à Mars 1
203.	1844 III...	Déc. 13, 68127	119.5.4	45.38.32	177.43.26	9,400 913	1,000 3530	1844 Déc. 24 à Mars 1
204.	1845 I...	Janv. 8, 16784	337.30.36	46.51.26	114.35.20	9,956 749	1,000 2467	1844 Déc. 28 à Mars 3
205.	1845 II...	Avril 21, 05492	347.53.10	56.22.57	205.27.37	0,098 456	0,999 472	1845 Févr. 25 à Mai
206.	1845 III...	Juin 5, 68971	338.34.45	131.5.10	75.48.9	9,603 228	1	1845 Juin 2 à Juill.
212.	1846 V...	Mai 27, 90234	162.3.57	122.23.23	78.44.55	0,138 616	1	1846 Juill. 29 à Sept. 2
215.	1846 VIII.	Oct. 29, 78372	5.26.33	49.42.25	93.58.23	9,919 428	1	1846 Sept. 23 à Oct. 2
216.	1847 I...	Mars 30, 29086	22.25.58	48.39.8	254.20.54	8,629 341	0,999 9096	1487 Févr. 6 à Avril 2
217.	1847 II...	Juin 4, 69903	174.41.30	100.25.46	32.20.34	0,325 349	1	1847 Mai 13 à Déc. 3
218.	1847 III...	Août 9, 34434	339.0.29	96.34.9	91.31.40	0,247 005	0,998 5879	1847 Juill. 4 à Avril
219.	1847 IV...	Août 9, 35158	77.28.0	147.21.13	55.26.53	0,171 675	1	1847 Sept. 8 à Nov. 5
221.	1847 VI...	Nov. 14, 40637	191.34.16	108.8.42	276.36.48	9,517 228	1,000 1727	1847 Oct. 3 à Déc.
222.	1848 I...	Sept. 8, 05177	212.15.15	95.36.14	260.57.23	9,505 078	1	1848 Août 7 à Août 9
224.	1849 I...	Janv. 19, 35431	215.55.38	85.2.36	208.1.6	9,982 150	1	1848 Oct. 26 à Janv. 5
225.	1849 II...	Mai 26, 49906	203.15.32	67.9.34	33.10.4	0,064 232	1,000 7079	1849 Avril 15 à Sept.
227.	1850 I...	Juill. 23, 53445	93.35.11	68.11.20	180.32.3	0,034 006	0,998 8519	1850 Mai 2 à Oct.
228.	1850 II...	Oct. 19, 34390	206.42.7	40.4.29	243.12.54	9,752 496	1	1850 Août 29 à Nov.
231.	1851 III...	Août 26, 25000	224.21.59	38.12.38	87.16.16	9,993 324	0,999 915	1851 Août 1 à Sept.
232.	1851 IV...	Sept. 30, 80309	45.2.28	73.58.52	294.25.19	9,152 100	1	1851 Oct. 22 à Nov.
234.	1852 II...	Avril 19, 59380	317.52.52	131.6.50	37.12.59	9,956 843	1	1852 Mai 17 à Juin

Calculateur.	Autorité.	Nom.	Éléments rapportés au plan de Z' pour 1900,0.			Remarques.
			Ω .	i .	ω .	
	A. N., 103, p. 336.	1771.....	10.31.25"	10.53.45"	82.41.51"	Orbites non définitives et très incertaines.
	As. J., 1806, p. 131.	1802.....	298.28.51	58. 7.30	22.39.37	
	C. des T., 1808, p. 338.	1804.....	166.17.44	56.28.46	330.31.19	
	A. N., 58, p. 92.	1806 II...	312.17.44	145.52.31	226.56.40	
	A. N., 99, p. 348.	1810.....	297. 3. 2	64. 3.50	115.40.10	
	C. des T., 1820, p. 419.	1813 I...	51.16.23	157.43.31	352.59.51	
	C. des T., 1820, p. 420.	1813 II...	31.19.16	98.14.28	205.52.28	
	C. des T., 1821, p. 337.	1818 II...	58.45.56	88.38.14	113.13. 8	Orbite non définitive.
erger.	As. J., 1824, p. 145.	1818 III...	78.31.20	115.42.14	348.26.37	
	M. N., 36, p. 309.	1819 II...	262. 7.10	82. 3.10	13.19.13	
erger.	A. N., 1, p. 425.	1821.....	37.20.54	105.36.15	170.14.11	
t.	A. N., 1, p. 311.	1822 I...	166.56. 0	126. 9.55	343. 6.31	
	A. N., 3, p. 113.	1823.....	291.31.49	104.59.45	29. 1.57	
	A. N. 138, p. 330.	1824 I...	222. 1.25	126.22.26	332.57.51	
	A. N., 4, p. 123.	1824 II...	267.36. 7	55.54.12	85.16. 8	Orbite non définitive.
	VJS, 1896, p. 310.	1825 I...	9.19.18	123. 0.18	108.46.12	
	A. N., 4, p. 531.	1826 II...	187.27.23	40.13.29	277.22.29	Orbite non définitive. Idem.
nder.	A. N., 5, p. 358.	1826 IV...	30. 9. 7	25.11.47	16.12.49	
ren.	A. N., 160, p. 241.	1827 I...	172.35.22	102.18.41	149.42. 1	Orbite non définitive.
nstein.	A. N., 6, p. 305.	1827 II...	307.32. 6	137.21.45	21.52.23	
e.	A. N., 82, p. 101.	1830 I...	197.45.49	21.42.15	2.26.48	Orbite non définitive.
s.	A. N., 10, p. 68.	1830 II...	327.17.44	135.54.19	28.30.45	
e.	A. N., 82, p. 110.	1832 II...	61.17.10	135.29.30	205.26. 6	Orbite non définitive.
of.	B. A., 6, p. 115.	1834.....	223.24.15	6.52. 7	41.29.58	
berg.	VJS, 1896, p. 310.	1835 I...	51.18. 2	169.50.40	215.16.43	Orbite non définitive.
berg.	A. N., 131, p. 258.	1840 I...	108.26.29	51.52.14	71.38.28	
zyk.	A. N., 81, p. 133.	1840 III...	174.23.18	79.48.29	136.43. 7	Orbite non définitive.
tzschild.	A. N. 137, p. 189.	1842 II...	195.31.49	106.51. 8	239.14.34	
	A. N., 23, p. 71.	1843 II...	146.11. 9	52. 3.55	122.50. 3	Orbite non définitive.
nour.	Mém. Genève, t. XI.	1844 II...	20.45. 5	130.53. 1	212.51. 2	
	A. J., 1, p. 103.	1844 III...	106.48.29	44.24.40	177. 5.43	(Orbite erronée. Voir p. 111 et suiv.)
k.	A. N., 83, p. 208.	1845 I...	323.46. 1	47.33.33	116. 5.38	
r.	A. N., 137, p. 309.	1845 II...	334.21.58	56.52.18	206.54.49	Orbite non définitive.
	A. J., 24, p. 25.	1845 III...	326.51.17	131.44.52	77.18.29	
	A. N., 71, p. 101.	1846 V...	148.37. 9	121.46.49	77.22.54	Orbite non définitive.
enheim.	A. N., 123, p. 31.	1846 VIII.	351.37. 4	49.48.39	95.40.55	
ein.	VJS, 6, p. 118.	1847 I...	8.34.55	48.22.14	256. 3.16	Orbite non définitive.
sm.	VJS, 17, p. 295.	1847 II...	161.44.32	100. 5.37	31. 3.27	
	A. N., 36, p. 80.	1847 III...	326.25.27	97.13.48	92.39.54	Orbite non définitive.
	A. N., 88, p. 218.	1847 IV...	65.28.52	146. 8.13	56.19.37	
etta et Palmer.	Obs. Yale University.	1847 VI...	178.25.17	108.11.19	275.14.13	Orbite non définitive.
of.	A. N., 117, p. 248.	1848 I...	199.24.35	96. 6.36	259.44.36	
n et Sonntag.	A. N., 29, p. 305.	1849 I...	203.18. 8	85.37.40	206.50.37	Orbite non définitive.
	A. N., 35, p. 197.	1849 II...	191. 4. 8	67.28.39	31.47.32	
ton.	A. N., 37, p. 41.	1850 I...	80.48.37	66.53.14	180.40.46	Idem.
berg.	A. N. 133, p. 401.	1850 II...	195.27. 1	40.28.44	241.17.23	
	VJS, 1896, p. 310.	1851 III...	212.58.45	38.58.19	85.33.54	Orbite non définitive.
	A. N., 81, p. 57.	1851 IV...	32. 0.24	73.13.20	295.32. 0	
ten.	A. N., 81, p. 43.	1852 II...	305.53.21	132. 8. 1	38.18.48	Orbite non définitive.

N° Galle.	Nom.	Date du passage au périhélie (T. m. de Paris).	Éléments éclipitiques pour 1900,0.			log <i>q</i> .	<i>e</i> .	Limites des observations utilisées
			Ω .	i .	ω .			
239.	1853 III...	Sept. 1, 71319	141.10.27	61.30.41	170.26.1	9,486 914	1,000 2609	1853 Juin 10 à Janv.
240.	1853 IV...	Oct. 16, 61186	220.45.4	119. 0. 7	277.50.40	9,237 236	1,001 2289	1853 Sept. 11 à Déc.
241.	1854 I...	Janv. 3, 94163	227.41.11	113.53. 0	177.55.53	0,310 618	1	1853 Déc. 2 à Mars
242.	1854 II...	Mars 24, 02086	316. 7.22	97.27.35	101.37.59	9,442 555	1	1854 Mars 31 à Avril
243.	1854 III...	Juin 22, 00356	348.18.13	108.41.23	74.34.17	9,811 650	1	1854 Juin 5 à Juill.
247.	1855 II...	Mai 30, 15396	260.55.43	156.53. 9	22.35.34	9,753 396	1	1855 Juin 4 à Juin
250.	1857 I...	Mars 21, 37557	313.45.20	87.56.17	121.34.22	9,887 895	1	1857 Févr. 22 à Mai
252.	1857 III...	Juill. 17, 98076	24.17.38	121. 1.19	134. 3.29	9,565 298	1	1857 Juin 22 à Juill.
260.	1858 IV...	Juin 5, 30209	325.33.16	99.57.36	98.51.53	9,735 807	1	1858 Mai 21 à Juin
263.	1859....	Mai 29, 23263	357.55. 4	95.28.36	282. 0.14	9,303 265	1	1859 Avril 7 à Mai
267.	1860 II...	Mars 5, 57201	9.25.57	48.13.24	41.12.45	0,116 164	1	1860 Avril 17 à Mai
268.	1860 III...	Juin 16, 06750	85.13.58	79.19.25	76.52.16	9,466 698	1	1860 Juin 21 à Oct.
272.	1861 III...	Déc. 7, 18092	145.38. 1	138. 0.48	331.35.17	9,923 776	1	1861 Déc. 28 à Févr.
274.	1862 II...	Juin 22, 03609	327. 4.58	172. 5.51	27.12.33	9,991 814	1	1862 Juill. 2 à Juill.
276.	1862 IV...	Déc. 28, 18060	356.17.52	137.31.41	230.34.32	9,904 844	1	1862 Nov. 27 à Févr.
277.	1863 I...	Févr. 3, 49765	117.26.31	85.21.46	74.27.27	9,900 235	0,999 9170	1862 Déc. 1 à Mars
278.	1863 II...	Avril 4, 91081	251.46.27	112.37.43	3.59.41	0,028 607	1	1863 Avril 13 à Nov.
279.	1863 III...	Avril 20, 87116	250.41. 5	85.29.57	55.36.19	9,798 499	0,999 0756	1863 Avril 12 à Juin
280.	1863 IV...	Nov. 9, 48589	97.59.32	78. 4.44	357.13. 8	9,849 166	0,998 985	1863 Nov. 9 à Févr.
281.	1863 V...	Déc. 27, 76915	305.13.38	64.28.55	115.40.48	9,887 331	1	1863 Déc. 28 à Mars
282.	1863 VI...	Déc. 29, 17306	105.32.21	83.19.10	78. 6.12	0,118 305	1,000 6499	1863 Oct. 11 à Avril
283.	1864 I...	Juill. 27, 81825	175.29. 4	134.59.43	346. 5.43	9,796 648	1	1864 Sept. 9 à Oct.
285.	1864 III...	Oct. 11, 41150	32.15.36	109.42.11	232.27.37	9,969 043	1	1864 Juill. 23 à Févr.
286.	1864 IV...	Déc. 22, 45755	203.42.37	48.52.24	118.27.39	9,886 903	1	1864 Déc. 18 à Févr.
287.	1864 V...	Déc. 27, 72616	341.23.29	162.52.54	178.30.34	0,047 135	1	1864 Déc. 30 à Janv.
288.	1865 I...	Janv. 14, 33180	253.25.45	92.29.49	111.43.49	8,412 353	1	1865 Janv. 20 à Mai
294.	1867 III...	Nov. 6, 96729	65.26.39	96.34.10	148.37.59	9,518 987	1	1867 Oct. 1 à Oct.
296.	1868 II...	Juin 26, 48275	52.42.21	131.33. 5	126.37.42	9,762 361	1	1868 Juin 13 à Juill.
299.	1869 II...	Oct. 9, 86044	311.56. 0	111.40.18	188.12.27	0,090 174	1	1869 Oct. 12 à Nov.
301.	1870 I...	Juill. 14, 08868	142. 9.59	121.47.40	198.13.11	0,003 759	1	1870 Mai 29 à Juill.
302.	1870 II...	Sept. 2, 20110	13.21.27	99.21.18	354.57. 1	0,259 277	1	1870 Août 28 à Déc.
306.	1871 I...	Juill. 27, 04094	212.18.29	101.59.18	96.19.49	0,034 774	1	1871 Juin 14 à Sept.
314.	1873 V...	Oct. 1, 77367	177. 5.59	121.28.32	233.45.18	9,585 363	0,999 730	1873 Août 23 à Nov.
318.	1874 I...	Mars 13, 94210	274.28.20	148.24.33	331.44.21	9,947 310	1	1874 Avril 11 à Juin
319.	1874 III...	Juill. 8, 86482	119. 6.11	66.21. 5	152.21.57	9,829 807	0,998 8202	1874 Avril 17 à Oct.
321.	1874 V...	Août 26, 85007	251.52. 8	41.49.45	92.38.19	9,992 398	0,998 8309	1874 Juill. 25 à Oct.
322.	1874 VI...	Oct. 18, 94934	282.19.18	99.12.59	16.16.51	9,706 057	1	1874 Déc. 8 à Janv.
325.	1877 I...	Janv. 19, 18514	187.34.12	152.54.27	347.10. 4	9,907 111	1	1877 Févr. 8 à Mars
326.	1877 II...	Avril 17, 66268	316.56.32	121. 8.40	63. 7.46	9,977 715	0,998 7005	1877 Avril 5 à Juill.
327.	1877 III...	Avril 26, 81233	346.24. 5	77.10.43	116.46.27	0,003 914	0,997 9243	1877 Avril 15 à Juin
330.	1877 VI...	Sept. 11, 22471	251.19. 0	102.13.49	143.13. 5	0,197 530	1	1877 Sept. 14 à Déc.
333.	1879 II...	Avril 27, 42900	46. 3.18	107. 2. 9	3.44.31	9,952 573	1	1879 Juin 20 à Août
337.	1879 IV...	Août 29, 28524	32.43.10	107.45.10	84.15.18	9,996 284	1	1879 Août 24 à Sept.
338.	1879 V...	Oct. 4, 63149	87.28.31	77. 7.51	115.26.33	9,995 463	1	1879 Août 21 à Oct.
340.	1880 II...	Juill. 1, 74612	257.31.42	123. 3.41	145.11.46	0,258 657	1	1880 Avril 6 à Oct.
341.	1880 III...	Sept. 6, 94156	45.35.49	141.54.14	323. 6.45	9,549 781	1	1880 Sept. 30 à Nov.
347.	1881 IV...	Août 22, 31248	97.18.42	140.13.53	122. 7.30	9,801 776	1	1881 Juill. 14 à Oct.
349.	1881 VI...	Sept. 14, 37183	274.25.42	112.48.49	6.18. 0	9,652 440	1	1881 Sept. 21 à Oct.
352.	1882 I...	Juin 10, 53612	205.11.33	73.48.32	208.59.33	8,783 638	0,999 9945	1882 Mars 19 à Août

Calculateur.	Autorité.	Nom.	Éléments rapportés au plan de Z' pour 1900,0.			Remarques.
			Ω .	i .	ω .	
	A. N., 70, p. 1.	1853 III...	128.56'.18"	60.32'.28"	169.26'. 0"	
st.	A. N., 38, p. 190.	1853 IV...	207.24. 0	119.40.33	276.33.27	Orbite non définitive.
ki.	A. N., 47, p. 177.	1854 I...	214.30. 2	114.41.22	169.48. 1	Idem.
u.	C. R., 38, p. 1064.	1854 II...	303.30.43	98.30.31	102.25.24	Idem.
cke et Pape.	A. N., 42, p. 119.	1854 III...	336. 0. 8	109. 9.26	75.51.49	
e.	A. N., 42, p. 200.	1855 II...	247.10.40	158. 7.22	21.28.39	
	Acad. Vienne.	1857 I...	301. 0.55	89. 1. 8	122.18.38	
	A. N., 128, p. 391.	1857 III...	12.19.39	120.40.41	135.31.44	
s.	A. N., 51, p. 124.	1858 IV...	313. 0.27	100.51.57	99.49.30	
prung.	A. N., 53, p. 152.	1859.	345.19.23	95.44.12	283.17.33	
.	B. S'Pét., t. VI, p. 363.	1860 II...	355.32.24	48.14.13	42.58. 1	
s.	VJS, 3, p. 121.	1860 III...	72.26.52	78. 3.19	77.11.58	
r.	A. N., 69, p. 106.	1861 III...	131.53.21	137. 5.56	330.12. 3	
.	A. N., 118, p. 203.	1862 II...	322. 9.28	172.54.50	35. 4.17	Orbite non définitive.
mann.	A. N., 65, p. 61.	1862 IV...	344.58.48	137.48.37	232.28.23	
auf.	A. N., 60, p. 145.	1863 I...	104.45.31	84. 7. 6	74. 3. 4	
on.	A. N., 62, p. 343.	1863 II...	238.47.31	113.47.10	3.19.50	
rup.	A. N., 118, p. 358.	1863 III...	238. 0.27	86.38.48	54.58.29	
iner.	A. N., 117, p. 242.	1863 IV...	85.15.51	76.46.15	357.15.11	
	Thèse.	1863 V...	292.14.36	65.39.42	116.18.17	
	A. N., 68, p. 159.	1863 VI...	92.50.11	82. 1. 6	77.57.46	
czyk.	A. N., 73, p. 84.	1864 I...	161.30.18	134.39.57	344.18.34	
sten.	A. N., 66, p. 123.	1864 III...	19.57.53	109.11.28	233.44.15	
czyk.	A. N., 73, p. 90.	1864 IV...	192. 5.17	49.12.29	116.47. 8	
iner.	A. N., 68, p. 119.	1864 V...	332.33.23	163.27.30	182.34. 7	Orbite non définitive.
r.	Thèse (Breslau).	1865 I...	240.40.39	93.40.22	111. 9.19	
	A. N., 121, p. 356.	1867 III...	52.48. 3	95.29. 2	149.21.45	
ski.	Ann., 1883, p. 214.	1868 II...	40.48.40	130.38.51	127.53. 4	
czyk.	A. N., 81, p. 143.	1869 II...	299.30. 4	112.46.25	188.58.12	
r.	Acad. Vienne.	1870 I...	128.54.30	120.49.44	197.11. 9	
och.	A. N., 141, p. 377.	1870 II...	0.53.40	99.15.47	356.16.23	
r.	Thèse (Leyde).	1871 II...	199.19.32	102.29.39	95. 5.43	
.	Obs. Kiel, t. IX.	1873 V...	163.36. 8	121.11.14	232.15.38	
l.	Acad. Vienne.	1874 II...	261.34.32	149.42.45	331.30.52	
pperger.	Acad. Vienne, t. 86.	1874 III...	106.34.55	65. 8.53	151.52.50	
	Acad. Vienne, t. 88.	1874 V...	239.48. 8	42.59.33	91.45. 1	
chek.	A. N., 94, p. 190.	1874 VI...	269.36.45	100.31.24	16.20.52	
.	A. N., 100, p. 238.	1877 I...	172.17.57	152.50. 8	344.18. 7	
	Galle.	1877 II...	304.42.56	122.10.45	64. 4.14	
eh.	A. N., 113, p. 187.	1877 III...	333.24.48	77.41.37	118. 0.24	
n.	A. N., 116, p. 25.	1877 VI...	238.27.20	103.23. 1	142.35. 2	
er.	A. N., 108, p. 102.	1879 II...	33.38.52	106.15. 9	4.50.10	
vich.	Mém. Spett. Italiani.	1879 IV...	20.22.38	107.13.54	85.30.49	
	VJS, 1896, p. 310.	1879 V...	74.41.21	75.51. 3	115.43.20	
er.	Acad. Vienne, t. 84.	1880 II...	244.28.48	124.16.27	144.36.18	
.	A. N., 103, p. 353.	1880 III...	34.11.39	141. 7. 1	324.47.45	
rt.	A. N., 108, p. 228.	1881 IV...	84.38.51	138.55.24	122.11.57	
vich.	A. N., 102, p. 269.	1881 VI...	261.39.28	114. 7. 2	6.10.29	
eur-Paschwitz.	A. N., 117, p. 285.	1882 I...	192.49.59	74.10. 5	208.51.42	

N° Galle.	Nom.	Date du passage au périhélie (T. m. de Paris.)	Éléments écliptiques pour 1900,0.			log q.	e.	Limites des observations utilisées
			Ω .	i .	ω .			
334.	1882 III...	Nov. 12, 9807	249.22.31"	96. 8.59"	254.18. 0"	9,980 264	1,000 074	1882 Sept. 13 à Déc. 8
335.	1883 I...	Févr. 18, 94856	278.22.52	78. 4. 7	110.53.14	9,880 771	0,999 0853	1883 Févr. 23 à Avril 15
356.	1883 II...	Déc. 25, 3092	264.38.34	114.59.11	138.38.54	9,490 94	1	1884 Janv. 12 à Févr. 4
361.	1885 II...	Août 5, 54394	92.29.42	80.39.25	178.27. 9	0,399 290	1,002 8519	1885 Juill. 17 à Août 17
364.	1885 V...	Nov. 25, 51643	262.23.53	42.26.32	35.37.12	0,033 274	1	1885 Déc. 28 à Mars 1
365.	1886 I...	Avril 5, 96890	36.34.22	82.37.22	126.35.31	9,807 767	1	1885 Déc. 1 à Mars 22
366.	1886 II...	Mai 3, 29332	68.30.53	84.26. 7	119.36.36	9,680 580	1,000 2286	1885 Déc. 3 à Juill. 26
367.	1886 III...	Mai 4, 45145	287.57.15	100.12.10	38.33.27	9,925 294	1	1886 Avril 30 à Mai 24
372.	1886 VIII.	Nov. 28, 38161	258.22.52	85.35.17	31.53.10	0,170 274	1	1887 Janv. 24 à Mars 20
373.	1886 IX...	Déc. 16, 50319	137.34.18	101.37.29	86.20.22	9,821 726	1,000 3824	1886 Oct. 5 à Juin 16
376.	1887 III...	Mars 28, 43115	135.38. 2	139.47.21	36.31.42	0,002 825	1,000 4192	1887 Févr. 22 à Avril 10
381.	1888 III...	Juill. 31, 14287	101.39.52	74.11.39	59.12.14	9,955 315	0,999 9079	1888 Août 9 à Oct. 30
384.	1889 I...	Janv. 31, 17837	357.34.29	166.22.18	340.27.42	0,258 852	1,001 0863	1888 Sept. 2 à 89 Oct. 26
385.	1889 II...	Juin 10, 77911	310.51.37	163.50.35	236. 4.52	0,353 208	0,999 5208	1889 Mars 31 à Nov. 21
390.	1890 I...	Janv. 26, 48707	8.36.28	56.44.20	199.51.41	9,430 982	1	1889 Déc. 12 à Janv. 16
391.	1890 II...	Juin 1, 53952	320.29. 4	120.33.26	68.56. 1	0,280 484	1,000 410	1890 Mars 21 à 92 Févr. 4
392.	1890 III...	Juill. 8, 54656	14.26.47	63.20. 9	89.39.39	9,883 167	1	1890 Juill. 19 à Août 6
395.	1890 VI...	Sept. 24, 51453	100.15.36	98.56.29	163. 2.23	0,100 448	0,999 1542	1890 Juill. 23 à Nov. 7
397.	1891 I...	Avril 27, 52749	194. 3.34	120.31.26	178.45.19	9,599 770	1	1891 Mars 29 à Juill. 9
400.	1891 IV...	Nov. 13, 54917	218. 7.45	77.59.51	269.34.35	9,987 259	1	1891 Oct. 3 à Déc. 6
402.	1892 I...	Avril 6, 65953	241. 1. 1	38.42.20	24.31. 5	0,011 499	0,998 613	1892 Mars 6 à Juin 6
403.	1892 II...	Mai 11, 23121	253.32.33	89.41.53	129.19.47	0,294 620	1,000 345	1892 Mars 25 à Janv. 12
407.	1892 VI...	Déc. 28, 1044	264.36.22	24.47.47	252.42.26	9,989 320	1	1892 Sept. 1 à Oct. 30
408.	1893 I...	Janv. 6, 50236	185.45. 9	143.51.45	85.13.18	0,077 408	1	1892 Nov. 21 à Févr. 14
409.	1893 II...	Juill. 7, 27795	337.26.51	159.58. 5	47. 7.43	9,829 013	0,999 462	1893 Juill. 10 à Déc. 20
»	1895 III...	Oct. 21, 05916	83. 9.12	76.14.45	298.46.10	9,925 845	1	1895 Nov. 23 à Déc. 20
»	1895 IV...	Déc. 18, 33319	320.34. 8	141.36.42	272.40.21	9,283 259	1	1895 Nov. 17 à Mars 10
»	1896 I...	Janv. 31, 78360	208.53.44	155.44.47	358.20.12	9,768 889	1	1896 Févr. 15 à Mars 14
»	1896 III...	Avril 17, 65382	178.18.12	55.34.23	1.44.24	9,753 036	1,000 476	1896 Avril 16 à Juin 20
»	1896 IV...	Juill. 10, 94924	151. 2.37	88.26. 0	41. 3.12	0,058 006	1	1896 Sept. 6 à Oct. 5
»	1897 I...	Févr. 8, 11006	86.31. 4	146. 8.15	127.19. 1	0,026 444	1,000 927	1896 Nov. 2 à Avril 20
»	1897 III...	Déc. 8, 61907	32. 5.39	69.35.59	65.53.59	0,132 477	1	1897 Oct. 16 à Nov. 27
»	1898 V...	Juill. 25, 50309	278.19. 9	166.51. 3	22.24.11	0,176 473	1	1898 Juin 16 à Août 16
»	1898 VI...	Août 16, 2063	259. 7.53	70. 1.37	205.36.23	9,796 950	1	1898 Juin 19 à Août 7
»	1898 VII.	Sept. 14, 05070	74. 0.58	69.56. 0	233.15.19	0,230 859	1,001 034	1898 Juin 11 à Déc. 6
»	1898 VIII.	Sept. 20, 08020	95.52.14	22.30.27	4.35.33	0,358 758	1	1898 Nov. 23 à Avril 4
»	1898 IX...	Oct. 20, 54609	34.54.51	28.50.49	162.21.30	9,623 635	1	1898 Sept. 13 à Oct. 10
»	1898 X...	Nov. 23, 16440	96.19.54	140.20.57	123.32.26	9,878 504	0,999 7421	1898 Oct. 23 à Nov. 22
»	1899 I...	Avril 12, 98450	25. 0. 0	146.15.30	8.41.46	9,513 980	1,000 350	1899 Mars 4 à Août 10
»	1899 V...	Sept. 14, 4446	272.15.17	76.59.32	10.30. 9	0,251 540	1	1899 Sept. 30 à Oct. 25
»	1900 I...	Avril 28, 91242	40.22.31	146.27.10	24.21.27	0,124 458	1	1900 Févr. 3 à Févr. 23
»	1900 II...	Août 3, 20681	328. 0.51	62.31.21	12.25.43	0,006 395	1,000 4156	1900 Juill. 23 à Oct. 27
»	1901 I...	Avril 24, 25773	109.38. 2	131. 4.49	203. 2.14	9,388 827	1	1900 Avril 26 à Juin 15
»	1902 III...	Nov. 23, 86163	49.19.35	156.21. 4	152.57.49	9,603 212	1	1902 Sept. 1 à Nov. 1
»	1903 I...	Mars 16, 00088	2.15.26	30.55.28	133.41.13	9,613 450	1	1903 Janv. 19 à Mars 9
»	1903 II...	Mars 23, 28607	117.25.30	43.53.59	5.45. 2	0,443 156	1	1902 Déc. 5 à Janv. 17
»	1903 III...	Mars 25, 5179	213.11.59	66.29.37	186.40.43	9,710 54	1	1903 Avril 17 à Mai 15
»	1903 IV...	Août 27, 6121	293.30.24	84.59.44	127.19.27	9,518 126	1	1903 Juin 22 à Juill. 10

Calculateur.	Autorité.	Nom.	Éléments rapportés au plan de Z' pour 1900,0.			Remarques.
			Ω .	i .	ω .	
	Obs. Küffner, t. IV.	1882 III...	236.34.39"	97.16.54"	253.38.21"	
	Sid. M., t. V, p. 192.	1883 I...	265.39.55	79.22.37	110.51.45	Orbite non définitive.
enheim.	A. N., 108, p. 276.	1883 II...	251.45.40	116.15. 4	138.16.32	Orbite non définitive.
ch.	A. N., 123, p. 405.	1885 II...	79.44.47	79.21.29	178.36.49	Idem.
	A. N., 135, p. 30.	1885 V...	250. 4.59	43.41.41	35. 3.53	
up.	A. N., 114, p. 157.	1886 I...	23.41.43	82. 1.39	127.46. 5	Orbite non définitive.
	A. N., 132, p. 283.	1886 II...	55.44.40	83.18.47	120.17.14	
	A. N., 117, p. 10.	1886 III...	275.16.15	101.29.48	38.45.18	Orbite non définitive.
	A. J., t. VII, p. 87.	1886 VIII.	245.41.30	86.48.34	31.24.55	Orbite non définitive.
aum.	Thèse.	1886 IX...	124.41.34	100.35.39	85.31. 3	
ius.	A. N., 128, p. 167.	1887 III...	122. 1.33	138.43.37	35.21.25	
vich.	A. N., 123, p. 111.	1888 III...	88.57.32	72.53.12	59. 9. 3	Orbite non définitive.
ch.	A. N., 123, p. 280.	1889 I...	350.13.41	166.34.50	345.59.17	Orbite non définitive.
vich.	A. N., 123, p. 319.	1889 II...	300.40.11	164.56.44	238.42.28	Orbite non définitive.
nger.	A. N., 142, p. 74.	1890 I...	355. 1.46	56.46. 4	201.25.33	
ren.	Soc. Lund., t. IV.	1890 II...	308.17. 2	121.32.22	69.56.30	
	A. N., 132, p. 105.	1890 III...	1. 4. 9	63.13.45	91. 7.16	
obrinisky.	A. N., 134, p. 245.	1890 VI...	87.32.12	97.37.58	163. 1.15	
	Obs. Kiel, t. IX.	1891 I...	180.34. 4	120.37.14	177.14.22	
	A. J., t. 23, p. 163.	1891 IV...	205.38.45	78.37.40	268.24.20	
ch.	A. N., 130, p. 215.	1892 I...	229.16.56	39.44.16	23.14.45	Orbite non définitive.
	A. N., 145, p. 253.	1892 II...	240.49. 9	90.52.31	128.45.29	
enheim.	A. N., 131, p. 175.	1892 VI...	252.34.28	26. 3.48	251.56.41	Orbite non définitive.
et Porter.	A. J., 43, p. 55.	1893 I...	171.14.56	143.45.29	83. 0.45	
	B. A., t. XII, p. 78.	1893 II...	327.52.46	160.37.51	50.28.36	
ief.	VJS, 1898, p. 326.	1895 III...	70.20.18	74.59.24	299. 8.58	
	VJS, 1897, p. 58.	1895 IV...	308.57.59	142.35.21	274. 5.21	Orbite non définitive.
z.	VJS, 1897, p. 59.	1896 I...	193.23.13	156. 9. 9	355.17. 1	Orbite non définitive.
	A. N., 148, p. 337.	1896 III...	166.28. 7	55.19.49	0.10.44	
	VJS, 1902, p. 275.	1896 IV...	138.21.30	87.37.16	40. 1.37	
	Publ. Kiel, n° 2.	1897 I...	74.12.59	144.51.40	127.49.32	
l.	A. N., 151, p. 218.	1897 III...	18.55. 4	69. 6. 1	67.11.33	
	VJS, 1902, p. 275.	1898 V...	265.28.35	168. 9.33	22.16.41	
	VJS, 1899, p. 77.	1898 VI...	246.34.11	71.15.17	205. 7.36	Orbite non définitive.
d.	A. N., 154, p. 229.	1898 VII...	61. 4.58	68.45. 9	233.51.29	
e.	VJS, 1900, p. 71.	1898 VIII.	82.56.27	21.12. 5	4.49. 4	Orbite non définitive.
	A. J., t. 22, p. 169.	1898 IX...	20. 0.18	28.18.25	164.51. 1	
e.	A. N., 164, p. 377.	1898 X...	83.41.38	139. 2.33	123.38.57	
d.	A. N., 157, p. 33.	1899 I...	14. 8.42	145.53.12	10.56.40	
ni.	VJS, 1900, p. 76.	1899 V...	259.34.12	78.17.26	10.20. 7	Orbite non définitive.
ch.	VJS, 1901, p. 62.	1900 I...	29.18.40	145.45.50	26.21.10	Orbite non définitive.
Simas.	Publ. Kiel, n° 4.	1900 II...	314.47.41	63.23.34	13.31.33	
	VJS, 1902, p. 63.	1901 I...	96.43. 5	129.47.31	202.44. 9	Orbite non définitive.
ren.	VJS, 1904, p. 43.	1902 III...	38.48.59	155.29.34	155.23. 6	Idem.
	VJS, 1904, p. 44.	1903 I...	347.22.54	31. 6.44	136.12. 1	Idem.
	VJS, 1904, p. 45.	1903 II...	105. 8.18	42.39.23	5. 9.16	Idem.
et Ebell.	VJS, 1904, p. 46.	1903 III...	200.59.33	67. 1.34	185.22.40	Idem.
	VJS, 1904, p. 48.	1903 IV...	280.45.43	86.15.54	127.38.34	Idem.

3. — Calcul des coordonnées héliocentriques de la planète perturbatrice.

Dans la méthode que nous employons, il est nécessaire de connaître, pour trois époques, t_0 , t_j et t_m , le rayon vecteur et l'anomalie vraie (ou l'anomalie moyenne) de Jupiter.

En premier lieu, on a déduit du *Berliner Jahrbuch*, ou des relevés dus à MM. Coniel ⁽¹⁾ et Müller ⁽²⁾, le rayon vecteur et la longitude héliocentrique; cette dernière coordonnée γ est fournie pour un équinoxe t qui change tous les dix ans; on l'a ramenée à celui de 1900,0, en utilisant la formule approchée, mais bien suffisante,

$$\Delta\lambda = (1900 - t)l,$$

l désignant la valeur de la constante de précession pour l'époque $\frac{1900 + t}{2}$.

Voici d'ailleurs une petite Table qui sert à ce calcul :

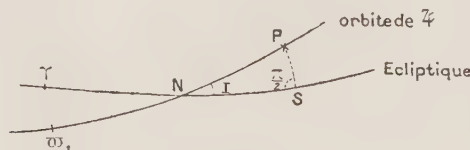
t .	l (Oppolzer, Table XI).	$\Delta\lambda$.
1770,0....	50,231	+1.48.50"
1800,0....	235	1.23.44
1810,0....	236	1.15.21
1820,0....	237	1.6.59
1830,0....	238	0.58.37
1840,0....	239	0.50.14
1850,0....	240	0.41.52
1860,0....	241	0.33.30
1870,0....	243	0.25.7
1880,0....	244	0.16.45
1890,0....	50,245	+0.8.22

On désignera par λ_1 la valeur de la longitude héliocentrique de Jupiter (ainsi ramenée à 1900,0) pour une époque donnée.

Si P (*fig. 5*) représente la position de la planète à cet instant, on a

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \gamma S, \\ NS &= \lambda_1 - N = \lambda_1 - 99^\circ 26' 35'';\end{aligned}$$

Fig. 5.



pour en déduire NP, il suffit d'ajouter algébriquement à NS une petite correc-

(1) *Bull. Astron.*, 1889, p. 64; 1890, p. 462; 1891, p. 77, 102, 157.

(2) *Astronomische Nachrichten*, n° 2506, p. 145.

tion ν , dont on donne une Table plus loin (Table III, p. 133) et qui n'est autre chose que la « réduction à l'écliptique » changée de signe ⁽¹⁾

$$NP = \lambda_1 - N + \nu.$$

Il suffit d'ajouter ensuite $\varpi_1 N = 86^\circ 43' 21''$, pour en conclure l'anomalie vraie V_1 ,

$$V_1 = NP + \varpi_1 N.$$

Pour calculer l'anomalie moyenne correspondante ζ_1 , on a les formules connues

$$\begin{aligned} \tan \frac{U_1}{2} &= \sqrt{\frac{1-e_1}{1+e_1}} \tan \frac{V_1}{2}, \\ \zeta_1 &= U_1 - e_1 \sin U_1, \end{aligned}$$

mais e_1 est très petit dans le cas actuel et il est permis de se contenter des relations approchées

$$\begin{aligned} \tan \frac{U_1}{2} &= (1 - e_1) \tan \frac{V_1}{2}, \\ \zeta_1 - U_1 &= \frac{-2e_1 \tan \frac{V_1}{2}}{1 + (1 - 2e_1) \tan^2 \frac{V_1}{2}}. \end{aligned}$$

La Table IV (p. 134) a cependant été calculée avec les formules rigoureuses et donne, de degré en degré, pour toutes les valeurs de V_1 , l'expression numérique de $(\zeta_1 - V_1)$.

Les Tables III et IV abrègent ainsi notablement le calcul des anomalies de la planète.

Le Tableau qui suit (p. 66 à 68) donne, pour chaque astre étudié, les coordonnées de Jupiter aux trois époques t_0 , t_j , t_m :

t_0 désigne la date du passage au périhélie de la comète;

t_j correspond à l'instant où les rayons vecteurs de la comète et de Jupiter deviennent égaux;

t_m est l'époque intermédiaire qui joue un rôle dans le calcul de l'intégrale N_2 .

Pour l'époque t_0 , on s'est contenté de donner le mois, car on sait que l'année est celle qui figure dans le nom de l'astre ⁽²⁾.

(1) Voir *Mémoires de l'Observatoire de Paris*, t. XII, p. 170.

(2) Par exemple, on appelle 1898 VI la comète qui est passée au périhélie la sixième depuis le 1^{er} janvier 1898.

Relevé des coordonnées de Jupiter (équinoxe 1900,0).

Astre.	Date. T. m. de Paris.	Époque t_0 .			Époque t_j .			Époque t_m .		
		Anomalie vraie. V_0 .	Anomalie moyenne.	Log rayon vecteur. $\log r_0$.	Date. T. m. de Paris.	Anomalie vraie. V_j .	Log rayon vecteur. $\log r_j$.	Date. T. m. de Paris.	Anomalie vraie. V_m .	Anomalie moyenne. ζ_m .
1771....	Avril 19, 14	274.16. 0	279.46.23	0,713 38	1770 Mars 5, 41	240.46,8	0,725 16	1763 Avril 9, 01	39.27,1	36. 1,9
1802....	Sept. 9, 86	154.56.47	152.31.18	0,734 63	1801 Juill. 13, 15	122. 5,0	0,726 46	1794 Août 14, 52	262. 8,3	267.39,0
1804....	Févr. 13, 65	194.26.40	195.52.38	0,736 18	1802 Déc. 6, 30	161.36,0	0,735 59	1795 Déc. 27, 22	304.43,7	309.11,3
1806II...	Déc. 28, 93	277.29.32	282.57.20	0,712 77	1803 Nov. 2, 69	242.59,4	0,725 16	1798 Déc. 6, 66	42. 7,2	38.30,3
1810....	Oct. 6, 24	40.56.38	37.24.44	0,699 30	1809 Sept. 24, 51	6.41,5	0,694 65	1802 Déc. 4, 06	161.25,5	159.35,7
1813I...	Mars 4, 53	115.44.25	110.40.25	0,724 19	1812 Févr. 18, 66	84.33,4	0,712 87	1805 Avril 8, 41	226.35,9	230.42,6
1813II...	Mai 19, 30	121.46.28	116.58.33	0,726 20	1812 Mars 30, 15	87.57,6	0,714 12	1803 Mai 17, 43	229.38,3	233.57,5
1818I...	Févr. 26, 25	256.10.20	261.35.43	0,720 51	1816 Déc. 16, 47	221.43,6	0,731 50	1810 Janv. 12, 57	15.46,0	14.18,8
1818III...	Déc. 5, 04	279.44. 2	285. 9.25	0,711 88	1817 Oct. 26, 31	246.15,0	0,724 02	1810 Déc. 1, 69	45.59,6	42. 6,5
1819II...	Juin 27, 72	297.18.28	302. 8.49	0,705 77	1818 Juill. 6, 80	267. 3,6	0,716 56	1811 Août 21, 19	69. 3,7	63. 7,3
1821....	Mars 21, 54	354.12.59	354.45.17	0,694 55	1820 Mai 11, 70	325.37,0	0,698 12	1813 Juill. 17, 40	126.26,4	121.53,2
1822I...	Mai 5, 63	31.42.20	28.52.56	0,697 39	1821 Mai 26, 53	0.16,3	0,694 43	1814 Août 5, 32	156. 7,1	153.47,9
1823....	Déc. 9, 45	82.49.57	77.21.50	0,712 47	1823 Janv. 12, 72	54.15,5	0,702 85	1816 Mars 14, 07	200.30,2	202.30,8
1824I...	Juill. 11, 53	100.43. 0	95.14.23	0,719 09	1823 Juill. 11, 58	69.57,4	0,707 88	1816 Sept. 4, 18	213.47,3	216.57,9
1824II...	Sept. 29, 07	105.11.44	99.48. 4	0,721 46	1823 Août 26, 94	73.56,5	0,709 26	1816 Oct. 18, 92	217.13,9	220.41,0
1825I...	Mai 30, 58	126.37.10	122. 0.26	0,728 01	1824 Avril 27, 53	94.32,8	0,716 81	1817 Juin 11, 61	235.33,8	240.13,6
1826II...	Oct. 21, 92	161. 9. 9	156.17.59	0,735 74	1825 Mai 10, 92	125. 4,3	0,727 53	1818 Juin 11, 97	265. 0,5	270.32,5
1826IV...	Oct. 8, 96	164.47.32	163.17.11	0,736 15	1825 Août 22, 91	133.13,1	0,729 94	1818 Sept. 20, 96	273.24,4	278.55,3
1827I...	Févr. 4, 92	173.47.18	173.10. 1	0,736 80	1826 Janv. 11, 80	144.11,9	0,732 74	1819 Févr. 6, 34	285. 6,5	290.24,3
1827II...	Juin 7, 85	183. 3.33	183.21.56	0,736 89	1826 Avril 19, 41	151.40,7	0,734 27	1819 Mai 13, 01	293.20,1	298.20,8
1830I...	Avril 9, 30	263.55.35	269.27.11	0,717 35	1829 Févr. 17, 89	230.23,5	0,728 81	1822 Mars 20, 35	27.30,1	25. 1,5
1830II...	Déc. 27, 67	285.59.53	291.16. 4	0,709 28	1830 Janv. 20, 90	257.29,4	0,719 70	1823 Mars 3, 52	58.38,3	53.59,7
1832II...	Sept. 25, 58	342.44.37	344.19.53	0,695 36	1831 Août 23, 80	306.49,1	0,702 58	1824 Juill. 15, 46	109.10,3	103.52,7
1834....	Avril 2, 80	33.22.57	30.25.32	0,697 91	1833 Avril 22, 96	1.55,7	0,694 50	1826 Juill. 2, 68	157.19,6	155. 7,2
1835I...	Mars 27, 21	65. 9.45	60.12.48	0,706 49	1834 Janv. 26, 04	27.20,3	0,696 81	1826 Sept. 16, 19	178.10,9	177.59,9
1840I...	Janv. 4, 48	202.49.23	205. 2.42	0,735 03	1838 Nov. 27, 32	172.19,8	0,736 68	1831 Déc. 17, 85	317. 8,5	320.48,6
1840III...	Avril 2, 44	209.36.48	212.26.15	0,733 85	1839 Févr. 14, 06	178.16,5	0,736 85	1832 Mars 5, 37	324.11,8	327.20,6
1842II...	Déc. 15, 96	289.23.28	294.33. 5	0,708 13	1841 Nov. 28, 24	258. 5,6	0,719 38	1835 Janv. 19, 24	59.19,2	54.38,6
1843II...	Mai 6, 06	301.39.35	306.17. 3	0,704 20	1842 Févr. 21, 05	264.14,8	0,717 14	1835 Avril 6, 74	66. 4,3	61. 5,0
1844II...	Oct. 17, 35	349.22.24	350.21.35	0,695 09	1843 Oct. 7, 19	315.19,3	0,700 45	1836 Déc. 9, 26	116.58,1	111.57,1
1844III...	Déc. 13, 68	354.37.18	355. 7.23	0,694 86	1844 Janv. 20, 77	324.46,4	0,698 34	1837 Mars 27, 22	125.31,5	120.52,0
1845I...	Janv. 8, 17	356.56.19	357.13.30	0,694 81	1843 Déc. 27, 70	322.36,6	0,698 78	1837 Mars 2, 65	123.34,9	118.48,8
1845II...	Avril 21, 06	6.22.49	5.47.11	0,694 93	1844 Mars 20, 82	330.11,9	0,697 33	1837 Mai 27, 39	130.19,2	125.59,7
1845III...	Juin 5, 69	10.33.17	9.34.32	0,695 16	1844 Juill. 2, 99	339.39,7	0,695 96	1837 Sept. 10, 09	138.32,0	134.45,8
1846V...	Mai 27, 90	41.49. 9	38.13.23	0,700 25	1845 Avril 23, 20	6.34,0	0,694 94	1838 Juill. 2, 43	161. 8,2	159.17,0
1846VIII...	Oct. 29, 78	56.32.29	52. 0.47	0,703 97	1845 Oct. 24, 89	23.25,9	0,696 51	1839 Janv. 1, 36	174.58,5	174.28,4
1847I...	Mars 30, 29	69.43.10	64.35.25	0,708 17	1846 Mai 22, 78	42.21,8	0,700 14	1839 Juill. 26, 20	190.30,8	191.33,5
1847II...	Juin 4, 70	75.24.53	70. 6.17	0,710 14	1846 Mars 31, 90	37.42,9	0,699 09	1839 Juin 5, 50	186.41,2	187.21,2
1847III...	Oct. 9, 34	80.59.23	75.33. 8	0,712 11	1846 Juin 12, 72	44.13,8	0,700 61	1839 Août 15, 61	192. 3,7	193.15,7
1847IV...	Oct. 9, 35	80.59.26	75.33.11	0,712 11	1846 Juin 23, 55	45.11,8	0,700 83	1839 Août 26, 19	192.51,7	194. 8,4
1847VI...	Nov. 14, 41	88.59.48	83.27.51	0,715 05	1846 Déc. 7, 63	59.56,7	0,705 02	1840 Févr. 4, 51	205.11,4	207.37,7
1848I...	Sept. 8, 05	113.33.45	108.24.46	0,723 79	1847 Sept. 23, 48	84.47,8	0,713 48	1840 Nov. 10, 52	226.45,5	230.53,6
1849I...	Janv. 19, 35	124.10.23	119.29.50	0,727 24	1847 Déc. 14, 61	91.39,7	0,715 98	1844 Janv. 28, 69	232.57,1	237.28,1
1849II...	Mai 26, 50	134. 7.32	130. 2.54	0,730 12	1848 Avril 3, 13	100.45,9	0,719 29	1841 Mai 2, 99	240.25,0	245.19,1
1850I...	Juill. 23, 53	166.32. 9	165.11.58	0,736 08	1849 Mai 21, 97	133.46,3	0,730 03	1842 Juin 19, 91	274. 9,1	279.39,6
1850II...	Oct. 19, 34	173. 8.51	172.27.44	0,736 51	1849 Sept. 20, 81	143.12,5	0,732 37	1842 Oct. 16, 81	283.13,8	288.34,5
1851III...	Oct. 26, 25	196.41.48	198.20.43	0,735 69	1850 Juin 23, 32	164.14,8	0,735 86	1843 Juill. 14, 90	307.48,7	312. 5,4
1851IV...	Sept. 30, 80	199.23.41	201.17.57	0,735 38	1850 Oct. 3, 71	171.59,9	0,736 45	1843 Oct. 24, 53	316.51,0	320.32,4
1852II...	Avril 19, 59	214.49. 9	218. 4.40	0,732 68	1851 Févr. 20, 15	182.32,1	0,736 62	1844 Mars 11, 76	329.22,7	332. 6,7

Relevé des coordonnées de Jupiter (équinoxe 1900,0) (suite).

Astre.	Époque t_0 .				Époque t_j .				Époque t_m .			
	Date. T. m. de Paris.	Anomalie vraie. V_0 .	Anomalie moyenne. ζ_0 .	Log rayon vecteur. $\log r_0$.	Date. T. m. de Paris.	Anomalie vraie. V_j .	Log rayon vecteur. $\log r_j$.		Date. T. m. de Paris.	Anomalie vraie. V_m .	Anomalie moyenne. ζ_m .	
1853 III..	Sept. 1, 71	254.26.25"	259.49.35"	0,720 85	1852 Août 28, 44	224.56.6	0,730 22		1845 Sept. 26, 14	20.48,9	18.54,9	
1853 IV..	Oct. 16, 61	257.55.50	263.23.11	0,719 55	1852 Oct. 25, 75	229.30,2	0,728 95		1845 Nov. 25, 03	26.15,4	23.53,1	
1854 I...	Janv. 3, 94	264.27.11	269.59. 5	0,717 19	1852 Sept. 18, 52	226.35,1	0,729 77		1845 Oct. 17, 78	22.46,9	20.42,6	
1854 II...	Mars 24, 02	271. 1.22	276.33.18	0,714 79	1853 Mars 28, 37	241.37,2	0,725 21		1846 Mai 2, 28	40.31,5	37. 1,5	
1854 III..	Juin 22, 00	278.35.19	284. 2. 1	0,712 06	1853 Mai 28, 98	246.32,7	0,723 56		1846 Juill. 4, 91	46.12,5	42.18,6	
1855 II...	Mai 30, 15	308.12.25	312.27.45	0,702 46	1854 Mai 25, 24	276.14,6	0,712 90		1847 Juill. 13, 96	78.45,3	73.21,8	
1857 I...	Mars 21, 38	8. 8.12	7.22.47	0,695 04	1856 Mars 20, 16	334.40,5	0,696 74		1849 Mai 27, 39	134.11,6	130. 7,2	
1857 III..	Juill. 17, 98	18.58.12	17.13.47	0,695 92	1856 Août 17, 78	348.24,1	0,695 24		1849 Oct. 26, 68	145.58,0	142.46,3	
1858 IV..	Juin 5, 30	48. 1. 0	43.59.53	0,701 48	1857 Juin 21, 78	16.34,8	0,695 67		1850 Août 30, 20	169.23,1	168.19,8	
1859....	Mai 29, 23	79. 7.59	73.43.59	0,711 28	1858 Juill. 5, 42	50.41,3	0,702 19		1851 Sept. 5, 52	196.28,5	198. 6,1	
1860 II...	Mars 5, 57	102.33.43	97. 6.54	0,719 74	1859 Janv. 19, 05	67.58,8	0,707 45		1852 Mars 15, 13	212. 5,6	215. 7,8	
1860 III..	Juin 16, 07	110.52.36	105.38. 9	0,722 67	1859 Juill. 5, 01	82.14,9	0,712 38		1852 Août 23, 34	224.32,4	228.31,4	
1861 III..	Mars 7, 18	131.49.26	127.35.44	0,729 32	1860 Févr. 4, 03	100. 3,7	0,718 84		1853 Mars 17, 68	240.46,0	245.41,1	
1862 II...	Juin 22, 04	168. 1. 8	166.49.37	0,736 22	1861 Avril 26, 52	135.44,9	0,730 40		1854 Mai 24, 99	276.13,2	281.42,2	
1862 IV..	Déc. 28, 18	182.18.45	182.32.38	0,736 76	1861 Nov. 9, 61	150.56,8	0,733 87		1854 Déc. 3, 71	292.40,8	297.43,1	
1863 I...	Févr. 3, 50	185. 7.59	185.38.49	0,736 71	1861 Déc. 16, 87	153.47,7	0,734 39		1855 Janv. 9, 31	295.55,2	300.49,3	
1863 II...	Avril 4, 91	189.41.50	190.39.53	0,736 51	1862 Janv. 26, 76	156.54,9	0,734 89		1855 Févr. 18, 57	299.21,9	304. 6,4	
1863 III..	Avril 20, 87	190.54.15	191.59.24	0,736 43	1862 Mars 14, 55	160.28,4	0,735 40		1855 Avril 5, 72	303.24,5	307.56,4	
1863 IV..	Nov. 9, 49	206.16.49	208.48.53	0,734 71	1862 Sept. 25, 54	175.14,5	0,736 66		1855 Oct. 16, 10	320.35,2	324. 0,2	
1863 V...	Déc. 27, 77	209.58. 4	212.49.25	0,734 02	1862 Nov. 7, 81	178.30,6	0,736 75		1855 Nov. 28, 25	324.27,9	327.35,6	
1863 VI..	Déc. 29, 17	210. 4.30	212.56.23	0,734 01	1862 Oct. 4, 60	175.55,6	0,736 69		1855 Oct. 24, 12	321.18,3	324.40,3	
1864 I...	Juill. 27, 82	226.23.31	230.30.14	0,730 28	1863 Juin 20, 85	193.31,2	0,736 04		1856 Juill. 11, 20	344.58,1	346.21,4	
1864 III..	Oct. 11, 41	232.50.32	237.21.14	0,728 43	1863 Août 20, 56	200.12,1	0,735 54		1856 Sept. 10, 54	350.34,7	351.27,1	
1864 IV..	Déc. 22, 46	237.58. 3	242.45.12	0,726 87	1863 Nov. 6, 18	206. 1,8	0,734 71		1856 Nov. 28, 22	357.46,6	357.59,2	
1864 V...	Déc. 27, 73	238.22.59	243.11.22	0,726 73	1863 Oct. 18, 56	204.36,7	0,734 92		1856 Nov. 9, 34	356. 3,0	356.25,1	
1865 I...	Janv. 14, 33	239.46.35	244.38.59	0,726 29	1864 Févr. 1, 64	212.42,8	0,733 49		1857 Févr. 25, 23	5.55,7	5.22,6	
1867 III..	Nov. 6, 97	326.52.41	329.48.51	0,698 14	1866 Nov. 28, 62	296.26,5	0,706 31		1860 Janv. 25, 01	99.14,4	93.44,6	
1868 II...	Juin 26, 48	348. 0.59	349. 7.36	0,695 16	1867 Juill. 5, 75	315.44,1	0,700 67		1860 Sept. 6, 57	117.29,4	112.29,7	
1869 II...	Oct. 9, 86	30. 0.21	27.19.14	0,697 29	1868 Sept. 13, 03	355.12,5	0,694 75		1861 Nov. 22, 47	151.55,8	149.14,3	
1870 I...	Juill. 14, 09	55.48. 4	51.18.48	0,703 16	1869 Juin 28, 52	21.36,9	0,695 89		1862 Mai 28, 69	173.44,3	173. 7,3	
1870 II...	Sept. 2, 20	60.12.20	55.29. 9	0,704 46	1869 Juill. 10, 96	22.45,0	0,696 03		1862 Sept. 17, 98	174.40,2	174. 8,2	
1871 II...	Juill. 27, 04	88.18.44	82.47. 2	0,714 16	1870 Juin 28, 80	54.27,2	0,702 77		1863 Août 29, 24	200.47,2	202.49,3	
1873 V...	Oct. 1, 78	151.51.33	149. 9.39	0,734 03	1872 Sept. 25, 53	123. 1,2	0,726 49		1863 Oct. 28, 85	262.58,5	268.29,7	
1874 II...	Mars 13, 94	164.16.38	162.43.18	0,735 91	1873 Janv. 24, 26	132.30,8	0,729 37		1866 Févr. 23, 02	272.41,5	278.12,7	
1874 III..	Juill. 8, 87	173. 7.26	172.26.10	0,736 65	1873 Juin 2, 18	142.31,3	0,732 03		1866 Juin 28, 61	283.17,0	288.37,6	
1874 V...	Oct. 26, 85	176.49.13	176.30. 7	0,736 81	1873 Juin 28, 50	144.33,0	0,732 50		1866 Juill. 24, 34	285.28,5	290.45,8	
1874 VI..	Oct. 18, 95	180.49.48	180.54.48	0,736 87	1873 Sept. 23, 18	151.12,1	0,733 91		1866 Oct. 17, 23	292.46,4	297.47,3	
1877 I...	Janv. 19, 19	244. 8.51	249.12.36	0,724 89	1875 Déc. 2, 45	211.52,9	0,733 77		1868 Déc. 25, 68	4.42,5	4.16,2	
1877 II...	Avril 17, 66	251.14.33	256.32.49	0,722 45	1876 Févr. 20, 53	218. 1,8	0,732 45		1869 Mars 17, 42	12.11,9	11. 4,1	
1877 III..	Avril 26, 81	251.58.49	257.18.19	0,722 19	1876 Févr. 25, 93	218.26,7	0,732 36		1869 Mars 22, 94	12.42,3	11.31,6	
1877 VI..	Sept. 11, 23	263.10.46	268.42. 2	0,718 12	1876 Juin 12, 96	226.48,6	0,730 24		1869 Juill. 11, 64	22.48,7	20.44,1	
1879 II...	Avril 27, 43	314. 2.34	317.55.35	0,700 96	1878 Mars 30, 81	279.55,0	0,711 96		1871 Mai 20, 64	82.38,2	77.10,2	
1879 IV..	Oct. 29, 29	325. 8.24	328.12.48	0,698 34	1878 Juill. 31, 14	290.21,7	0,708 24		1871 Sept. 24, 31	93.15,3	87.43,0	
1879 V...	Oct. 4, 63	328.25.16	331.14. 2	0,697 68	1878 Sept. 6, 80	293.36,7	0,707 15		1871 Nov. 2, 22	96.29,1	90.57,7	
1880 II...	Juill. 1, 75	353. 8.14	353.46.32	0,694 67	1879 Mai 4, 27	314.39,1	0,700 81		1872 Juill. 5, 93	116.31,7	111.29,4	
1880 III..	Sept. 6, 94	359.17.51	359.21.46	0,694 49	1879 Oct. 7, 19	328.38,1	0,697 64		1872 Déc. 12, 42	129. 9,6	124.45,9	
1881 IV..	Oct. 22, 31	31.13.12	28.26.10	0,697 27	1880 Sept. 2, 45	358.53,1	0,694 49		1873 Nov. 12, 17	155. 1,2	151.36,0	
1881 VI..	Sept. 14, 37	33.18.25	30.21.22	0,697 66	1880 Oct. 9, 50	2.17,1	0,694 48		1873 Déc. 19, 24	157.50,8	155.41,1	
1882 I...	Juin 10, 54	57.19.54	52.45.36	0,703 70	1881 Août 4, 68	29.37,3	0,696 99		1874 Oct. 11, 63	180.16,7	180.18,2	

Relevé des coordonnées de Jupiter (équinoxe 1900,0) (suite et fin).

Époque t_0 .					Époque t_j .			Époque t_m .				
Date.		Anomalie vraie.	Anomalie moyenne.	Log rayon vecteur.	Date.		Anomalie vraie.	Log rayon vecteur.	Date.		Anomalie vraie.	Anomalie moyenne.
Astre.	T. m. de Paris.	V_0 .	ζ_0 .	$\log r_0$.	T. m. de Paris.	V_j .	$\log r_j$.		T. m. de Paris.	V_m .	ζ_m .	
1882 III..	Nov. 12, 98	74.51.45"	69.34. 5"	0,708 10	1881 Oct. 28, 81	37.19,0	0,698 48		1875 Janv. 3, 10	186.34,7	187.14,3	
1883 I...	Févr. 18, 95	79.14.49	73.50.41	0,711 06	1882 Févr. 13, 93	47. 0,3	0,700 78		1875 Avril 18, 63	194.33,0	195.59,5	
1883 II..	Déc. 25, 31	104.58.10	99.34.12	0,720 55	1883 Janv. 13, 59	76. 8,9	0,709 95		1876 Mars 6, 76	219.12,1	222.48,2	
1885 II..	Août 5, 54	151.16.17	148.31.13	0,734 15	1884 Avril 20, 73	114.26,8	0,723 93		1877 Mai 27, 21	254.26,5	259.49,6	
1885 V...	Nov. 25, 52	159.47.57	157.49.12	0,735 54	1884 Sept. 26, 67	127. 4,0	0,728 06		1877 Oct. 28, 06	267. 2,8	272.35,2	
1886 I...	Avril 5, 97	169.45.13	168.43 55	0,736 56	1885 Mars 3, 54	139.21,5	0,731 51		1878 Mars 30, 62	279.54,2	285.19,4	
1886 II..	Mai 3, 29	171.49. 3	170.59.59	0,736 70	1885 Avril 11, 93	142.24,0	0,732 26		1878 Mai 8, 07	283. 9,9	288.30,7	
1886 III..	Mai 4, 45	171.54.18	171. 5.44	0,736 70	1885 Mars 16, 82	140.23,1	0,731 77		1878 Avril 12, 57	280.59,9	286.23,7	
1886 VIII.	Nov. 28, 38	187.35.47	188.21.21	0,736 74	1885 Août 28, 89	153. 3,2	0,734 48		1878 Sept. 21, 22	294.51,7	299.48,6	
1886 IX..	Déc. 16, 50	188.57.55	189.51.38	0,736 67	1885 Nov. 6, 57	158.21,6	0,735 33		1878 Nov. 28, 82	300.50,2	305.30,2	
1887 III..	Mars 28, 43	196.40 26	198.19.14	0,736 02	1886 Janv. 21, 75	164. 8,3	0,736 06		1879 Févr. 12, 08	307.27,0	311.45,1	
1888 III..	Juill. 31, 14	234.27.21	239. 3.29	0,727 72	1887 Juin 2, 54	201.41,4	0,735 38		1880 Juin 25, 73	352.35,0	353.16,3	
1889 I...	Janv. 31, 18	249. 5.59	254.20.23	0,722 84	1887 Oct. 18, 99	212.15,1	0,733 53		1880 Nov. 11, 55	5 18,9	4.49,3	
1889 II..	Juin 10, 78	259.42.27	265.11.26	0,719 02	1888 Févr. 16, 70	221.32,8	0,731 40		1881 Mars 14, 90	15.37,0	14.10,7	
1890 I...	Janv. 26, 49	278.50.11	284.16.37	0,711 94	1889 Févr. 3, 37	249.21,5	0,722 76		1882 Mars 13, 28	49.26,3	45.19,8	
1890 II..	Juin 1, 54	289.36. 7	294.45.18	0,708 12	1889 Mars 1, 74	251.29,1	0,721 99		1882 Avril 9, 58	51.52,1	47.36,5	
1890 III..	Juill. 8, 55	292.47.51	297.49.52	0,707 04	1889 Juin 11, 55	259.46,2	0,719 01		1882 Juill. 23, 99	61. 8,3	56.22,4	
1890 VI..	Sept. 24, 52	299.35. 5	304.18.55	0,704 83	1889 Juill. 29, 62	263.43,4	0,717 52		1882 Sept. 11, 85	65.29,2	60.31,4	
1891 I...	Avril 27, 53	318.37.48	322.11.32	0,699 54	1890 Mai 10, 79	287.43,9	0,708 78		1883 Juill. 4, 33	90.38,6	85. 6,3	
1891 IV..	Nov. 13, 55	336.42.38	338.49.48	0,696 12	1890 Oct. 21, 55	301.57,1	0,704 10		1883 Déc. 20, 48	104.34,6	99.10,2	
1892 I...	Avril 6, 66	349.58.13	350.54. 6	0,694 78	1891 Mars 16, 59	314.52,7	0,700 46		1884 Mai 18, 65	116.40,8	111.39,0	
1892 II..	Mai 11, 23	353. 8.14	353.46.32	0,694 62	1891 Mars 9, 49	314.14,7	0,700 63		1884 Mai 11, 35	116. 6,0	111. 2,4	
1892 VI..	Déc. 28, 10	14.18.12	12.58.54	0,695 10	1891 Déc. 15, 76	339.38,7	0,695 73		1885 Févr. 22, 11	138.37,8	134.51,9	
1893 I...	Janv. 6, 50	15. 9.49	13.45.51	0,695 18	1891 Déc. 12, 32	339.19,8	0,695 77		1885 Févr. 18, 63	138.21,6	134.34,6	
1893 II..	Juill. 7, 28	31.42.25	28.53. 0	0,697 51	1892 Juill. 15, 51	359. 7,5	0,694 47		1885 Sept. 24, 26	155. 3,9	152.39,1	
1895 III..	Oct. 21, 06	103.46.32	98.21. 6	0,720 30	1894 Oct. 1, 20	71.34,0	0,708 56		1887 Nov. 24, 99	215. 5,5	218.22,4	
1895 IV..	Déc. 18, 33	108.30.13	103.11.31	0,722 01	1895 Janv. 14, 71	80.34,3	0,711 76		1888 Mars 5, 77	222.56,7	226.49,3	
1896 I...	Janv. 31, 78	112. 5. 7	106.53. 2	0,723 27	1895 Janv. 26, 20	81.32,7	0,712 11		1888 Mars 16, 85	223.48,4	227.44,5	
1896 III..	Avril 17, 65	118.13.50	113.16. 1	0,725 37	1895 Avril 11, 93	87.55,0	0,714 45		1888 Mai 28, 82	229.29,4	233.48,1	
1896 IV..	Juill. 10, 95	124.54.18	120.16. 4	0,727 53	1895 Mai 25, 02	91.33,2	0,715 78		1888 Juill. 9, 33	232.44,5	237.14,9	
1897 I...	Févr. 8, 11	141.26. 8	137.52.57	0,732 11	1895 Déc. 20, 09	108.38,7	0,722 05		1889 Janv. 26, 86	248.45,3	253.59,0	
1897 III..	Déc. 8, 65	164.36.21	163. 4.56	0,736 12	1896 Sept. 21, 89	330.37,7	0,729 25		1889 Oct. 21, 80	270.42,6	276.14,4	
1898 V...	Juill. 25, 50	181.53.33	182. 4.55	0,736 87	1897 Avril 25, 37	147.18,0	0,733 42		1890 Mai 20, 05	288.31,6	293.43,1	
1898 VI..	Août 16, 20	183.31.50	183.53. 3	0,736 84	1897 Juill. 11, 15	153.10,3	0,734 54		1890 Août 3, 51	295. 3,0	299.59,4	
1898 VII.	Sept. 14, 05	185.42.28	186.16.45	0,736 77	1897 Juin 4, 75	150.23,5	0,734 04		1890 Juin 28, 64	291.56,5	297. 0,6	
1898 VIII.	Sept. 20, 08	186. 9.41	186.46.40	0,736 75	1897 Mai 23, 57	149.27,6	0,733 86		1890 Juin 16, 69	290.54,5	296. 0,9	
1898 IX..	Oct. 20, 55	188.27.51	189.18.36	0,736 63	1897 Sept. 30, 04	159.19,6	0,735 49		1890 Oct. 22, 09	302. 0,0	306.27,4	
1898 X...	Nov. 23, 16	191. 0.19	192. 6. 5	0,736 45	1897 Oct. 6, 89	159.50,8	0,735 56		1890 Oct. 28, 85	302.35,6	307.10,2	
1899 I...	Avril 12, 99	201.40.43	203.47.33	0,735 28	1898 Mars 29, 99	173. 1,4	0,736 73		1891 Avril 19, 45	317.54,4	321.31,3	
1899 V...	Sept. 14, 44	213.28.29	216.37.27	0,733 16	1898 Mai 28, 51	177.31,0	0,736 87		1891 Juin 17, 79	323.14,2	326.27,4	
1900 I...	Avril 28, 91	231. 6.50	235.31.28	0,728 59	1899 Févr. 3, 30	196.27,9	0,735 94		1892 Févr. 24, 78	346. 8,1	347.25,0	
1900 II..	Août 3, 21	238.42.13	243.31.31	0,726 23	1899 Mai 31, 80	205.23,7	0,734 69		1892 Juin 22, 86	357. 2,4	357.19,0	
1901 I...	Avril 24, 26	259.54.22	265.23.31	0,718 81	1900 Avril 26, 29	230.54,5	0,728 66		1893 Mai 26, 94	27.57,7	25.26,8	
1902 III..	Nov. 23, 86	309.18.33	313.29.50	0,702 04	1901 Déc. 3, 14	278.28,5	0,712 02		1895 Janv. 21, 90	81.10,9	75.44,4	
1903 I...	Mars 16, 00	319.18.15	322.49. 3	0,699 53	1902 Mars 28, 47	288.18,9	0,708 56		1895 Mai 21, 26	91.12,0	85.39,6	
1903 II..	Mars 23, 29	319.57.27	323.25.20	0,699 38	1901 Déc. 27, 21	280.30,9	0,711 29		1895 Févr. 15, 82	83.17,2	77.48,7	
1903 III..	Mars 25, 52	320. 9.27	323.36.30	0,699 33	1902 Mars 29, 80	288.25,8	0,708 52		1895 Mai 22, 64	91.18,9	85.46,5	
1903 IV..	Août 27, 61	334. 9.43	336.29.58	0,696 70	1902 Sept. 21, 26	303.41,7	0,703 63		1895 Nov. 19, 72	106.11,2	100.48,9	

4. — *Calcul du terme $\Delta_1(e)$.*

On a établi (p. 17) que ce terme pouvait se mettre sous la forme

$$\Delta_1(e) = a_0 A_0 + b_0 B_0 + c_0 C_0 + d_0 D_0 + a'_0 A'_0 + b'_0 B'_0 + c'_0 C'_0 + d'_0 D'_0,$$

dans laquelle les quantités $A_0, B_0, \dots, D'_0$ sont fournies par la Table I (p. 120), et $a_0, b_0, \dots, d'_0$ par la Table II (p. 128).

Le Tableau qui suit (p. 69 à 72) renferme les résultats qui ont été obtenus; il a paru avantageux de donner séparément les deux parties $\Sigma a_0 A_0$ et $\Sigma a'_0 A'_0$, dont la seconde dépend uniquement de e_1 et s'annule quand on convient de négliger l'excentricité de l'orbite Jovienne.

Expression numérique du terme $\Delta_1(e)$.

Astre.	$\Sigma a_0 A_0$.	$\Sigma a'_0 A'_0$.	$\Delta_1(e)$.
1771.....	+ 7",04	— 8",33	— 1",29
1802.....	+ 28,55	+ 3,12	+ 31,67
1804.....	— 116,87	+ 7,87	— 109,00
1806 II....	+ 66,37	+ 0,68	+ 67,05
1810.....	+ 57,79	— 0,10	+ 57,69
1813 I.....	— 58,58	+ 2,37	— 56,21
1813 II....	+ 65,64	— 0,88	+ 64,76
1818 II....	— 108,22	+ 5,37	— 102,85
1818 III....	+ 70,81	— 1,38	+ 69,43
1819 II....	— 6,81	+ 0,71	— 6,10
1821.....	— 2,23	— 0,19	— 2,42
1822 I.....	+ 48,19	+ 2,84	+ 51,03
1823.....	+ 0,54	+ 0,95	+ 1,49
1824 I.....	+ 58,03	+ 0,08	+ 58,11
1824 II....	— 113,86	— 2,88	— 116,74
1825 I.....	+ 57,03	— 4,23	+ 52,80
1826 II....	— 143,35	— 1,09	— 144,44
1826 IV....	— 106,96	+ 7,49	— 99,47
1827 I.....	+ 27,33	— 1,27	+ 26,06
1827 II....	+ 49,77	— 3,73	+ 46,04
1830 I.....	— 121,80	+ 2,43	— 119,37
1830 II....	— 4,42	+ 0,47	— 3,95
1832 II....	— 6,49	— 0,80	— 7,29
1834.....	— 54,17	— 1,70	— 55,87
1835 I.....	+ 137,15	— 0,54	+ 136,61
1840 I.....	— 25,97	+ 2,77	— 23,20
1840 III....	+ 84,13	— 5,44	+ 78,69
1842 II....	+ 2,71	+ 0,10	+ 2,81
1843 II....	— 72,39	— 3,00	— 75,39
1844 II....	+ 32,97	+ 1,57	+ 34,54

Expression numérique du terme $\Delta_1(e)$ (suite).

Astre.	$\Sigma a_0 A_0$.	$\Sigma a'_0 A'_0$.	$\Delta_1(e)$.
1844 III....	— 31,62	— 0,97	— 32,59
1845 I....	+ 117,84	+ 7,43	+ 125,27
1845 II....	+ 6,33	— 0,73	+ 5,60
1845 III....	— 0,94	+ 0,38	— 0,56
1846 V....	— 62,35	— 4,63	— 66,98
1846 VIII..	+ 67,69	+ 0,05	+ 67,74
1847 I....	+ 0,39	+ 0,20	+ 0,59
1847 II....	+ 59,30	+ 2,86	+ 62,16
1847 III....	+ 79,33	— 6,12	+ 73,21
1847 IV....	— 61,42	+ 3,60	— 57,82
1847 VI....	+ 15,14	— 0,14	+ 15,00
1848 I....	+ 3,47	— 0,52	+ 2,95
1849 I....	— 67,12	+ 1,35	— 65,77
1849 II....	+ 102,67	— 2,72	+ 99,95
1850 I....	+ 124,85	— 6,67	+ 118,18
1850 II....	— 63,38	+ 4,11	— 59,27
1851 III....	+ 119,13	— 8,00	+ 111,13
1851 IV....	+ 8,30	— 0,69	+ 7,61
1852 II....	+ 5,50	+ 1,63	+ 7,13
1853 III....	+ 15,68	+ 1,79	+ 17,47
1853 IV....	— 5,87	+ 4,54	— 1,33
1854 I....	+ 164,23	— 1,28	+ 162,95
1854 II....	+ 1,27	— 1,04	+ 0,23
1854 III....	— 11,71	— 1,34	— 13,05
1855 II....	— 32,64	— 2,73	— 35,37
1857 I....	+ 77,60	+ 5,01	+ 82,61
1857 III....	+ 14,97	+ 1,53	+ 16,50
1858 IV....	+ 28,27	+ 0,44	+ 28,71
1859.....	— 8,97	+ 0,25	— 8,72
1860 II....	— 115,24	— 6,76	— 122,00
1860 III....	+ 8,62	— 0,75	+ 7,87
1861 III....	— 32,52	— 1,92	— 34,44
1862 II....	+ 69,81	— 4,23	+ 65,58
1862 IV....	— 37,43	+ 1,69	— 35,74
1863 I....	+ 10,34	— 1,31	+ 9,03
1863 II....	+ 21,95	— 0,48	+ 21,47
1863 III....	+ 23,64	— 1,53	+ 22,11
1863 IV....	— 51,03	+ 1,36	— 49,67
1863 V....	— 41,72	+ 0,11	— 41,61
1863 VI....	— 14,67	+ 3,57	— 11,10
1864 I....	— 57,53	+ 1,35	— 56,18
1864 III....	+ 8,78	— 0,37	+ 8,41
1864 IV....	+ 93,37	— 1,86	+ 91,51
1864 V....	— 39,73	— 0,42	— 40,15
1865 I....	+ 0,69	— 0,09	+ 0,60
1867 III....	— 28,85	— 1,23	— 30,08
1868 II....	— 31,07	— 2,20	— 33,27

Expression numérique du terme $\Delta_1(e)$ (suite).

Astre.	$\Sigma a_0 A_0.$	$\Sigma a'_0 A_0.$	$\Delta_1(e).$
1869 II....	+ 76,22	+ 2,53	+ 78,75
1870 I....	— 34,97	+ 1,15	— 33,82
1870 II....	— 147,08	— 12,08	— 159,16
1871 II....	— 59,77	— 0,10	— 59,87
1873 V....	+ 16,10	— 0,58	+ 15,52
1874 II....	+ 72,90	— 4,48	+ 68,42
1874 III....	+ 85,67	— 5,29	+ 80,38
1874 V....	+ 32,67	— 0,36	+ 33,03
1874 VI....	+ 37,63	+ 0,96	+ 38,59
1877 I....	— 63,01	+ 1,00	— 62,01
1877 II....	— 29,70	— 0,37	— 30,07
1877 III....	— 62,40	— 4,56	— 66,96
1877 VI....	+ 141,86	— 5,25	+ 136,61
1879 II....	+ 56,65	+ 4,17	+ 60,82
1879 IV....	— 21,76	— 3,12	— 24,88
1879 V....	— 93,71	— 7,16	— 100,87
1880 II....	+ 111,13	+ 7,29	+ 121,42
1880 III....	+ 9,42	+ 0,26	+ 9,68
1881 IV....	— 40,74	— 0,84	— 41,58
1881 VI....	— 10,97	+ 0,60	— 10,37
1882 I....	— 4,75	— 0,34	— 5,09
1882 III....	+ 31,86	+ 2,10	+ 33,96
1883 I....	— 44,30	— 4,79	— 49,09
1883 II....	— 23,24	— 0,89	— 24,13
1885 II....	+ 207,22	— 3,01	+ 204,21
1885 V....	+ 98,78	— 2,05	+ 96,73
1886 I....	— 4,74	— 0,80	— 5,54
1886 II....	+ 17,45	— 1,65	+ 15,80
1886 III....	+ 33,10	— 1,33	+ 31,77
1886 VIII....	+ 81,39	— 4,57	+ 76,82
1886 IX....	+ 27,82	— 2,04	+ 25,78
1887 III....	— 19,71	— 0,50	— 20,21
1888 III....	— 59,42	+ 3,01	— 56,38
1889 I....	+ 92,39	+ 5,21	+ 97,60
1889 II....	+ 161,51	+ 1,76	+ 163,27
1890 I....	— 27,58	— 0,92	— 28,50
1890 II....	— 19,29	— 6,20	— 25,49
1890 III....	+ 16,29	— 4,16	+ 12,13
1890 VI....	— 115,44	— 0,05	— 115,39
1891 I....	+ 1,69	+ 1,41	+ 3,13
1891 IV....	57,38	— 0,97	+ 56,41
1892 I....	— 131,20	8,16	— 139,36
1892 II....	+ 145,72	+ 10,94	+ 156,66
1892 VI....	+ 91,43	+ 6,16	+ 97,59
1893 I....	— 0,28	— 1,91	— 2,19
1893 II....	— 12,70	+ 1,16	— 11,54
1895 III....	— 89,48	— 1,48	— 90,96

Expression numérique du terme $\Delta_1(e)$ (suite et fin).

Astre.	$\Sigma a_0 A_0.$	$\Sigma a'_0 A'_0.$	$\Delta_1(e).$
1895 IV...	— 13,00	+ 1,24	— 11,76
1896 I....	+ 33,12	— 2,87	+ 30,25
1896 III....	+ 47,53	— 3,88	+ 43,65
1896 IV....	+ 37,30	— 2,55	+ 34,75
1897 I....	+ 90,29	— 3,64	+ 86,65
1897 III....	— 93,85	+ 3,35	— 90,50
1898 V....	— 10,63	+ 1,70	— 8,93
1898 VI....	— 53,23	— 3,26	— 56,49
1898 VII....	+ 108,33	— 5,91	+ 102,42
1898 VIII..	— 323,77	+ 18,15	— 305,62
1898 IX...	— 12,39	+ 1,00	— 11,39
1898 X....	+ 57,26	— 2,75	+ 54,51
1899 I....	+ 26,66	— 1,72	+ 24,94
1899 V....	+ 125,02	— 4,45	+ 120,57
1900 I....	+ 82,94	— 0,53	+ 82,41
1900 II....	+ 108,19	— 2,75	+ 105,44
1901 II....	— 14,14	+ 0,23	— 13,91
1902 III....	— 32,22	— 2,17	— 34,39
1903 I....	+ 23,09	— 1,02	+ 22,07
1903 II....	+ 43,17	— 5,40	+ 37,77
1903 III....	+ 41,96	+ 3,53	+ 45,49
1903 IV....	+ 32,21	+ 1,95	+ 34,16

5. — *Calcul du terme $\frac{pm_1}{\rho_0}$.*

On a appliqué la relation

$$\rho_0^2 = q^2 + r_0^2 - 2qr_0 f(V_0 - \Omega, \omega) \quad (\text{voir p. 23}),$$

où r_0 et V_0 sont tirés des Tableaux des pages 66, 67 et 68.

Le calcul de $f(V_0 - \Omega, \omega)$ a été vérifié de la manière suivante : après avoir calculé sous la forme

$$\cos(V_0 - \Omega) \cos \omega + \sin(V_0 - \Omega) \sin \omega \cos i,$$

on a formé

$$f(V_0 - \Omega, \omega) = A_0 \cos(V_0 - \zeta_0) + C_0 \sin(V_0 - \zeta_0).$$

Voici les résultats obtenus :

Résultats numériques relatifs au terme $\frac{pm_1}{\rho_0}$.

Astre.	$\log \rho_0$.	$\frac{pm_1}{\rho_0}$.	Astre.	$\log \rho_0$.	$\frac{pm_1}{\rho_0}$.	Astre.	$\log \rho_0$.	$\frac{pm_1}{\rho_0}$.
1771	0,78225	+ 58,65	1853 IV...	0,71323	+ 13,17	1883 II...	0,70027	+ 24,33
1802	0,80592	67,39	1854 I....	0,83175	118,66	1885 II...	0,82264	148,62
1804	0,68418	87,41	1854 II...	0,71780	20,90	1885 V...	0,77620	71,20
1806 II...	0,78948	69,20	1854 III...	0,69284	51,79	1886 I....	0,70873	49,48
1810	0,66374	82,85	1855 II...	0,69766	44,79	1886 II...	0,72622	35,46
1813 I....	0,69585	55,48	1857 I....	0,71275	58,96	1886 III...	0,74475	59,70
1813 II...	0,73058	89,20	1857 III...	0,71986	27,60	1886 VIII..	0,69946	116,48
1818 II...	0,69359	95,63	1858 IV...	0,71176	41,64	1886 IX...	0,74659	46,83
1818 III...	0,77563	56,46	1859	0,71022	15,43	1887 III...	0,75856	69,13
1819 II...	0,69008	27,45	1860 II...	0,70918	100,56	1888 III...	0,75290	62,78
1821	0,70010	7,22	1860 III...	0,71604	22,19	1889 I....	0,79676	114,16
1822 I....	0,73189	36,83	1861 III...	0,66774	71,04	1889 II...	0,86838	126,30
1823	0,72809	16,69	1862 II...	0,77729	64,56	1890 I....	0,71842	20,32
1824 I....	0,75307	41,16	1862 IV...	0,71436	61,08	1890 II...	0,65395	166,71
1824 II...	0,72962	77,08	1863 I....	0,73222	58,00	1890 III...	0,73743	55,10
1825 I....	0,75534	61,54	1863 II...	0,68123	87,66	1890 VI...	0,61076	121,65
1826 II...	0,68826	162,15	1863 III...	0,72097	47,09	1891 I....	0,67443	33,17
1826 IV...	0,77200	56,79	1863 IV...	0,76569	47,74	1891 IV...	0,71467	73,79
1827 I....	0,77075	33,80	1863 V...	0,79883	48,30	1892 I....	0,72118	76,87
1827 II...	0,75967	55,37	1863 VI...	0,74387	93,30	1892 II...	0,68978	158,59
1830 I....	0,68854	74,36	1864 I....	0,70209	48,98	1892 VI...	0,74540	69,08
1830 II...	0,69974	9,90	1864 III...	0,70735	71,97	1893 I....	0,68524	97,18
1832 II...	0,74994	82,89	1864 IV...	0,72481	57,22	1893 II...	0,75180	47,06
1834	0,77613	33,85	1864 V...	0,73341	81,13	1895 III...	0,70577	65,39
1835 I....	0,82009	121,62	1865 I....	0,72705	1,91	1895 IV...	0,71895	14,45
1840 I....	0,70860	47,66	1867 III...	0,69945	26,00	1896 I....	0,72226	43,86
1840 III...	0,76684	50,44	1868 II...	0,69619	45,88	1896 III...	0,69505	45,02
1842 II...	0,69787	39,84	1869 II...	0,70306	96,06	1896 IV...	0,65910	98,71
1843 II...	0,61064	156,07	1870 I....	0,74433	71,59	1897 I....	0,79998	66,36
1844 II...	0,75884	58,72	1870 II...	0,64396	162,46	1897 III...	0,76251	92,34
1844 III...	0,68772	20,35	1871 II...	0,70217	84,73	1898 V...	0,69270	120,01
1845 I....	0,70474	70,38	1873 V...	0,75512	26,65	1898 VI...	0,75346	43,54
1845 II...	0,78492	81,09	1874 II...	0,77474	58,61	1898 VII...	0,74497	120,59
1845 III...	0,70648	31,06	1874 III...	0,74875	47,48	1898 VIII...	0,79413	144,56
1846 V...	0,66237	117,95	1874 V...	0,78907	62,92	1898 IX...	0,70211	32,88
1846 VIII.	0,66861	70,19	1874 VI...	0,73585	36,78	1898 X...	0,76491	51,17
1847 I....	0,71064	3,27	1877 I....	0,69272	64,54	1899 I....	0,75951	22,38
1847 II...	0,72081	158,48	1877 II...	0,67404	79,27	1899 V...	0,64815	158,06
1847 III...	0,74852	124,14	1877 III...	0,74960	70,75	1900 I....	0,80290	82,60
1847 IV...	0,68476	120,88	1877 VI...	0,81490	95,07	1900 II...	0,72317	75,62
1847 VI...	0,72427	24,46	1879 II...	0,69196	71,79	1901 I....	0,69903	19,29
1848 I....	0,72783	23,59	1879 IV...	0,68150	81,32	1902 III...	0,69027	32,24
1849 I...	0,74410	68,15	1879 V...	0,71340	75,42	1903 I....	0,73005	30,12
1849 II...	0,71189	88,67	1880 II...	0,72870	133,47	1903 II...	0,87602	145,40
1850 I....	0,75095	75,60	1880 III...	0,68241	29,03	1903 III...	0,68063	42,20
1850 II...	0,76636	38,16	1881 IV...	0,68990	50,97	1903 IV...	0,70671	+ 25,52
1851 III...	0,75332	68,46	1881 VI...	0,72480	33,35			
1851 IV...	0,74086	10,16	1882 I....	0,69996	4,78			
1852 II...	0,70826	69,83	1882 III...	0,69678	75,67			
1853 III...	0,70468	+ 23,86	1883 I....	0,69095	+ 60,99			

F.

6. — Calcul numérique de l'intégrale partielle N_1 .

Pour effectuer ce calcul, on a utilisé les formules (34) et (35) de la première Partie (p. 32), en choisissant comme limites $\theta_1 = +\frac{1}{3}$ et $\theta_2 = -\frac{1}{2}$, limites assez restreintes pour que, dans les exemples choisis, le développement parabolique de ρ^2 soit suffisamment exact.

Suivant le signe de c , on a fait usage d'une des deux formules que voici :

1° $c > 0$:

$$N_1 = \frac{pm_1}{r_j} \frac{1}{c(b^2 - ac)} \left[\frac{(\alpha c + a\gamma)\left(\frac{c}{3} + b\right) - (\beta c + 2b\gamma)\left(a + \frac{b}{3}\right)}{\sqrt{a + \frac{2}{3}b + \frac{c}{9}}} - \frac{(\alpha c + a\gamma)\left(b - \frac{c}{2}\right) - (\beta c + 2b\gamma)\left(a - \frac{b}{2}\right)}{\sqrt{a - b + \frac{c}{4}}} \right] \\ + \frac{pm_1}{r_j} \frac{\gamma}{c^{\frac{3}{2}}} L \sqrt{\frac{\frac{a + \frac{2}{3}b + \frac{c}{9}}{c} + \frac{b + \frac{c}{3}}{c}}{\frac{a - b + \frac{c}{4}}{c} + \frac{b - \frac{c}{2}}{c}}};$$

2° $c < 0$:

La partie algébrique est la même que dans le cas précédent, mais la partie transcendante devient

$$- \frac{pm_1}{r_j} \frac{\gamma}{c\sqrt{-c}} \left(\arcsin \frac{b + \frac{c}{3}}{\sqrt{b^2 - ac}} - \arcsin \frac{b - \frac{c}{2}}{\sqrt{b^2 - ac}} \right).$$

Dans les pages qui suivent (p. 75 à 78), on donne pour les astres choisis les valeurs de a , b , c , α , β , γ et de N_1 .

On remarquera que les c positifs sont plus nombreux. En outre, quand la partie transcendante est un *log népérien* elle a le signe de γ ; son signe est, au contraire, celui de $(-\gamma)$ quand il s'agit d'un arc sinus.

Valeurs numériques du terme N_1 .

Astre.	N_1						N_1		
	$a.$	$b.$	$c.$	$\alpha.$	$\beta.$	$\gamma.$	Partie algébrique.	Partie trans- cendante.	Total.
1771.	+1,7112	-1,5116	+3,6234	+0,9793	-1,3117	+0,2230	- 23,23	+ 2,46	- 20,77
1802.	+1,4716	-0,8083	+2,5487	+0,4980	-0,7743	-0,4523	- 7,68	- 9,25	- 16,93
1804.	+3,7959	-2,3858	-0,9423	-0,2924	+0,9712	+1,1186	+ 41,96	- 38,96	+ 3,00
1806 II.	+0,6077	+0,3890	+2,3373	-0,4597	-0,6687	-1,6509	+ 92,79	- 57,60	+ 35,19
1810.	+1,4865	-0,2895	-0,8397	-0,9488	+0,9198	-0,9787	- 27,84	+ 61,75	+ 33,91
1813 I.	+2,7499	-3,1778	+2,3035	+0,8996	-0,6517	+1,8628	- 30,44	+ 21,57	- 8,87
1813 II.	+2,1210	-0,7607	-0,6623	-0,1673	+0,8312	-0,4761	- 33,78	+ 37,74	+ 3,96
1818 II.	+3,8827	-2,0254	-1,4900	-0,2840	+1,2450	+0,7783	+ 22,31	- 19,17	+ 3,14
1818 III.	+0,3074	+0,1590	+3,0284	-0,0757	-1,0142	-1,4541	+ 29,01	- 38,34	- 9,33
1819.	+3,4737	-2,5856	-0,4429	-0,0310	+0,7214	+1,2185	+ 31,67	- 31,42	+ 0,25
1821.	+1,3245	-1,9066	+4,3680	+0,9361	-1,6840	+0,5055	- 3,85	+ 0,58	+ 3,27
1822 I.	+0,2700	+0,4453	+2,0289	-0,4159	-0,5144	-1,7856	+ 110,91	- 55,85	+ 55,06
1823.	+1,0068	-0,9923	+3,5207	+0,3880	-1,2604	-0,3898	- 2,80	- 1,49	- 4,29
1824 I.	+0,3997	+0,5316	+1,4695	-0,5727	-0,2348	-1,8613	+ 162,77	- 82,78	+ 79,99
1824 II.	+3,6427	-2,1314	+0,5316	+0,1780	+0,2342	+0,8704	- 57,67	+ 56,36	- 1,31
1825 I.	+1,4006	+0,2673	-0,2130	-0,8988	+0,6065	-1,5551	- 323,04	+354,61	+ 31,57
1826 II.	+3,0847	-1,4200	-1,1575	-0,8365	+1,0788	+0,3029	+ 37,95	- 18,21	+ 19,74
1826 IV.	+3,3694	-2,4693	+2,1200	+0,6220	-0,5600	+1,1722	- 19,70	+ 15,24	- 4,46
1827 I.	+0,2293	-0,6185	+4,1985	+0,4560	-1,5992	0,7279	- 60,45	- 9,00	- 69,45
1827 II.	+1,8505	+0,0931	-1,0073	-0,7772	+1,0036	-1,3977	- 34,75	+ 51,09	+ 16,34
1830 I.	+3,8332	-2,3932	-0,4769	-0,2761	+0,7385	+1,1066	+ 68,38	- 65,91	+ 2,47
1830 II.	+3,4519	-1,8955	-2,1339	-0,4686	+1,5670	+0,4984	+ 1,61	- 0,99	+ 0,62
1832 II.	+0,8059	-1,2300	+4,3717	+0,3983	-1,6859	-0,0072	- 23,75	- 0,13	- 23,88
1834.	+3,0070	-2,4772	+2,7488	+0,8560	-0,8744	+1,1383	- 12,75	+ 7,83	- 4,92
1835 I.	+2,0448	+0,7794	-1,2080	-0,9869	+1,1040	-1,8656	- 94,74	+157,06	+ 62,32
1840 I.	+2,7198	-1,5257	-0,5467	-0,5755	+0,7734	+0,1941	+ 12,74	- 7,90	+ 4,84
1840 III.	+0,0045	+0,0597	+2,6338	-0,0672	-0,8169	-1,3734	+1031,65	-110,50	+921,15
1842 II.	+2,5989	-1,5067	-0,5187	-0,0496	+0,7593	+0,1623	+ 6,41	- 6,05	+ 0,36
1843 II.	+2,7272	-1,1690	-1,6951	-0,9204	+1,3476	-0,0057	+ 21,49	+ 0,21	+ 21,70
1844 II.	+0,7011	-0,1251	+3,0436	-0,1368	-1,0218	-1,1629	+ 26,44	- 22,79	+ 3,65
1844 III.	+3,7950	-2,9301	+0,6396	+0,3456	+0,1802	+1,5520	- 20,87	+ 20,23	- 0,64
1845 I.	+0,0496	-0,0262	+1,8013	-0,1383	-0,4007	-1,2535	+ 343,91	-120,83	+223,08
1845 II.	+1,9804	-1,0510	+2,4249	+0,5480	-0,7124	-0,1722	- 10,78	- 3,96	- 14,74
1845 III.	+1,0436	-1,5876	+3,7450	+0,5318	-1,3725	+0,2317	- 11,90	+ 1,54	- 10,36
1846 V.	+3,6332	-2,2174	-1,1710	+0,2165	+1,0855	+1,0155	+ 38,60	- 41,07	- 2,47
1846 VIII.	+1,0267	-0,3618	-0,1138	-0,7490	+0,5569	-0,9289	- 398,72	+435,15	+ 36,43
1847 I.	+1,1648	-1,2333	+3,1423	+0,5185	-1,0712	-0,1749	- 0,82	- 0,13	- 0,95
1847 II.	+2,6917	-1,2419	-0,6939	+0,2222	+0,8470	+0,1676	+ 13,70	- 20,18	- 6,48
1847 III.	+1,5292	+0,1241	-0,2125	-0,9393	+0,6063	-1,2626	- 503,99	+361,91	+ 57,92
1847 IV.	+1,4872	-2,4546	+3,7032	+0,8438	-1,3516	+1,2678	- 79,30	+ 28,08	- 51,22
1847 VI.	+1,0055	-0,3934	+1,5399	-0,3788	-0,2700	-0,9741	+ 18,61	- 12,67	+ 5,94
1848 I.	+1,3373	-1,1734	+1,8504	-0,0408	-0,4252	-0,1963	+ 2,47	- 1,78	+ 0,69
1849 I.	+2,2952	-1,8455	+2,2501	+0,1701	-0,6251	+0,5684	- 11,65	+ 9,72	- 1,93
1849 II.	+1,2348	-0,7449	+0,3398	-0,0384	+0,3301	-0,5031	+ 94,49	- 94,19	+ 0,30

Valeurs numériques du terme N_1 (suite).

Astre.	α .	b .	c .	α .	β .	γ .	N_1		
							Partie algébrique.	Partie trans- cendante.	Total.
1850 I....	+0,7849	-0,0258	+0,5168	-0,2778	+0,2416	-1,2380	+ 194,07	-174,77	+ 19,30
1850 II....	+3,3805	-2,3638	+1,2992	+0,3355	-0,1496	+1,0257	- 15,88	+ 14,36	- 1,52
1851 III...	+0,2394	-0,3598	+2,1570	+0,1831	-0,5785	-0,9201	- 23,61	- 43,98	- 67,59
1851 IV...	+0,6673	-0,8504	+2,8576	+0,2887	-0,9288	-0,5453	- 1,63	- 1,83	- 3,46
1852 II....	+3,0497	-1,2124	-2,0699	-0,4205	+1,5350	-0,0791	+ 3,48	+ 1,19	+ 4,67
1853 III....	+1,9126	-0,5159	-1,7292	-0,9657	+1,3646	-0,8573	+ 0,41	+ 6,80	+ 7,21
1853 IV...	+3,1795	-1,7889	-1,1115	-0,2353	+1,0558	+0,3977	+ 2,57	- 2,10	+ 0,47
1854 I....	+1,3651	+0,5097	+0,5710	-0,4583	+0,2145	-1,6224	+ 344,95	-312,90	+ 32,05
1854 II....	+1,6125	-1,8626	+2,6442	+0,6073	-0,8221	+0,4856	- 7,13	+ 2,40	- 4,73
1854 III...	+2,5771	-2,2387	+0,7444	+0,4542	+0,1278	+0,9139	- 34,60	+ 30,25	- 4,35
1855 II....	+2,0871	-2,7982	+3,4526	+0,9454	-1,2263	+1,4638	- 21,78	+ 10,51	- 11,27
1857 I....	+0,3711	+0,2092	+1,3138	-0,5463	-0,1569	-1,5090	+ 178,42	- 91,37	+ 87,05
1857 III...	+0,3100	-0,8662	+4,3293	+0,4993	-1,6647	-0,4946	- 42,28	- 4,45	- 46,73
1858 IV...	+0,5473	-0,3921	+2,2562	-0,2215	-0,6781	-0,9423	+ 31,59	- 18,18	+ 13,41
1859.....	+2,6403	-2,2550	+1,3318	+0,5051	-0,1659	+0,8691	- 6,58	+ 5,14	- 1,44
1860 II....	+3,0895	-1,7797	+0,1370	-0,4225	+0,4315	+0,5601	- 184,74	+ 191,64	+ 6,90
1860 III...	+1,5655	-1,1586	+0,8494	-0,2406	+0,0753	-0,2148	+ 5,85	- 3,70	+ 2,15
1861 III...	+3,8526	-2,1145	-2,5255	-0,3171	+1,7628	+0,8185	+ 11,22	- 8,68	+ 2,54
1862 II....	+1,6286	+0,5273	-0,8970	-0,9749	+0,9485	-1,8059	- 65,43	+ 100,77	+ 35,34
1862 IV...	+2,0939	-2,0481	+2,6948	+0,7450	-0,8474	+1,3429	- 28,58	+ 16,67	- 11,91
1863 I....	+1,4984	-0,8839	+1,0690	-0,4255	-0,0345	-0,4226	+ 24,91	- 14,94	+ 9,97
1863 II....	+2,8199	-1,2139	-2,1736	-0,5066	+1,5868	-0,0536	+ 6,47	+ 0,95	+ 7,42
1863 III...	+1,8505	-1,3998	+0,3935	+0,0680	+0,3033	+0,0698	- 6,06	+ 4,85	- 1,21
1863 IV...	+2,2914	-2,1940	+3,3930	+0,7722	-1,1965	+0,8746	- 14,98	+ 6,93	- 8,05
1863 V....	+2,5067	-2,3000	+2,7409	+0,9183	-0,8704	+0,9896	- 19,93	+ 10,22	- 9,71
1863 VI...	+2,0137	-0,6333	+0,1039	-0,7343	+0,4481	-0,5990	+ 334,10	-315,15	+ 18,95
1864 I....	+3,1958	-3,2074	+1,5010	+0,7478	-0,2505	+1,8769	- 30,89	+ 26,41	- 4,78
1864 III...	+1,5604	-1,8951	+2,3520	+0,3199	-0,6760	+0,6077	- 18,80	+ 11,28	- 7,52
1864 IV...	+0,2663	+0,0121	+1,0415	-0,4337	-0,0208	-1,3221	+ 199,23	-104,00	+ 95,23
1864 V....	+1,4199	-2,4182	+4,3426	+0,9271	-1,6713	+1,1574	- 54,25	+ 16,52	- 37,73
1865 I....	+1,1940	-1,1964	+2,5139	+0,2773	-0,7569	-0,2144	- 0,16	- 0,12	- 0,28
1867 III...	+2,8911	-2,8997	+2,5138	+0,8950	-0,7569	+1,5321	- 11,08	+ 7,47	- 3,61
1868 II....	+2,1115	-2,7026	+3,3556	+0,9850	-1,1778	+1,3724	- 22,45	+ 10,75	- 11,70
1869 II....	+2,1884	-0,3871	-1,3948	-0,5023	+1,1974	-0,8388	- 19,96	+ 33,43	+ 13,47
1870 I....	+1,2718	-1,5428	+3,9708	+0,4583	-1,4854	+0,2804	- 18,65	+ 3,91	- 14,74
1870 II....	+2,5003	-2,4379	+1,6110	+0,2640	-0,3055	+1,3117	- 66,44	+ 60,70	- 5,74
1871 II....	+3,5444	-2,4385	-0,0861	+0,4123	+0,5431	+1,1854	+ 503,15	-507,66	- 4,51
1873 V....	+1,1575	-0,1994	+1,5058	-0,3166	-0,2529	-1,1627	+ 20,29	- 16,24	+ 4,05
1874 II....	+1,2588	+0,5842	-0,3275	-0,9135	+0,6638	-1,8764	- 254,47	+ 299,24	+ 44,77
1874 III...	+0,3107	+0,2606	+0,9192	-0,4926	+0,0404	-1,5832	+ 225,48	-127,70	+ 97,78
1874 V....	+1,2528	-1,2483	+3,1946	+0,8283	-1,0973	-0,0308	- 29,88	- 0,48	- 30,36
1874 VI...	+1,6676	-0,3075	-0,8638	-0,6098	+0,9319	-1,0388	- 20,10	+ 28,77	+ 8,67
1877 I....	+2,7765	-3,1818	+2,2491	+0,8933	-0,6246	+1,8772	- 33,91	+ 24,37	- 9,54
1877 II....	+2,9275	-2,4660	+0,1038	+0,4289	+0,4481	+1,1823	- 385,14	+ 380,23	- 4,91

Valeurs numériques du terme N_1 (suite).

Astre.	$a.$	$b.$	$c.$	$z.$	$\varphi.$	$\gamma.$	N_1		
							Partie algébrique.	Partie trans- cendante.	Total.
1877 III ...	+2,7572	-2,5012	+2,4581	+0,9074	-0,7291	+1,2260	- 28,97	+ 17,86	- 11,11
1877 VI ...	+0,2289	+0,1154	+3,3919	+0,0710	-1,1960	-1,3043	- 20,95	- 60,44	- 81,39
1879 II ...	+1,9439	-0,3408	-1,3545	-0,6275	+1,1773	-0,9445	- 1,74	+ 28,85	+ 27,11
1879 IV ...	+2,3984	-2,3958	+1,6452	+0,7407	-0,3226	+1,1303	- 40,39	+ 27,76	- 12,63
1879 V ...	+3,4583	-2,6550	+1,2716	+0,6541	-0,1358	+1,3855	- 42,29	+ 36,45	- 5,84
1880 II ...	+2,1287	+0,1841	-1,8030	-0,8551	+1,4015	-1,3144	- 21,77	+ 61,64	+ 39,87
1880 III ...	+2,7198	-0,6436	-2,4512	-0,9318	+1,7256	-0,7194	+ 1,11	+ 4,21	+ 5,32
1881 IV ...	+2,5533	-2,9856	+2,6098	+0,9440	-0,8049	+1,6650	- 26,36	+ 16,62	- 9,74
1881 VI ...	+1,1931	-1,5707	+4,2665	+0,6893	-1,6332	+0,2222	- 13,52	+ 1,33	- 12,19
1882 I ...	+1,6485	-1,8329	+3,6150	+0,7496	-1,3075	+0,4274	- 1,56	+ 0,35	- 1,21
1882 III ...	+0,9710	-1,3968	+2,5180	+0,2891	-0,7590	+0,1251	- 18,58	+ 3,10	- 15,48
1883 I ...	+3,5251	-1,6677	-1,4530	-0,5165	+1,2265	+0,3649	+ 10,71	- 6,59	+ 4,12
1883 II ...	+3,9564	-2,6170	-1,3404	-0,0268	+1,1702	+1,2461	+ 9,35	- 9,19	+ 0,16
1885 II ...	+1,6636	-0,1712	+0,4294	+0,1075	+0,2853	-0,8549	+ 226,46	-236,26	- 9,80
1885 V ...	+0,7588	-0,5150	+2,1009	+0,3715	-0,5504	-0,7484	- 8,15	+ 24,90	+ 33,05
1886 I ...	+2,8990	-1,0704	-1,9700	-0,8698	+1,4850	-0,2569	+ 4,23	+ 3,00	+ 7,23
1886 II ...	+1,9927	-0,4925	-1,0916	-0,9073	+1,0458	-0,8575	- 6,77	+ 16,24	+ 9,47
1886 III ...	+2,1660	-0,8093	-0,4573	-0,1982	+0,7287	-0,4898	- 33,90	+ 36,82	+ 2,92
1886 VIII ...	+1,8962	-1,1853	-0,1768	+0,0790	+0,5884	-0,0207	- 10,72	+ 7,48	- 3,24
1886 IX ...	+0,8480	-0,6570	+2,1370	-0,2059	-0,5685	-0,6681	+ 21,18	- 12,58	+ 8,60
1887 III ...	+1,0903	-1,7660	+4,2112	+0,5999	-1,6056	+0,4891	- 30,80	+ 6,52	- 24,28
1888 III ...	+2,7474	-1,4434	+0,8815	-0,1646	+0,0592	+0,1518	- 3,52	+ 5,50	+ 1,98
1889 I ...	+2,2743	+0,4611	-1,7822	-0,9714	+1,3911	-1,6142	- 29,80	+ 69,72	+ 39,92
1889 II ...	+1,0504	+1,0681	+1,0049	-0,8637	-0,0025	-2,1464	+ 511,10	-341,60	+169,50
1890 I ...	+3,1433	-2,6557	+1,8642	+0,5406	-0,4321	+1,2780	- 7,72	+ 6,32	- 1,40
1890 II ...	+1,6310	-2,3415	+2,8328	+0,8448	+0,9164	+1,2117	- 117,73	+ 40,16	- 77,57
1890 III ...	+1,6689	-1,6124	+2,6694	+0,7671	-0,8347	+0,3055	- 19,56	+ 4,05	- 15,51
1890 VI ...	+3,4974	-2,6513	-0,6002	+0,0390	+0,8001	+1,4196	+ 99,37	- 99,35	+ 0,02
1891 I ...	+2,9942	-1,1677	-2,5240	-0,7562	+1,7620	-0,1904	+ 2,90	- 1,12	+ 1,78
1891 IV ...	+1,5808	-1,7064	+2,5243	+0,7517	-0,7621	+0,4351	- 30,88	+ 8,33	- 22,55
1892 I ...	+3,5288	-2,3292	+1,1506	+0,1661	-0,0753	+1,0680	- 33,38	+ 32,29	- 1,09
1892 II ...	+1,5018	+0,1569	-1,1464	-0,8608	+1,0732	-1,2591	- 49,28	+120,04	+ 70,76
1892 VI ...	+0,5810	-0,6272	+2,9539	+0,6048	-0,9769	-0,6403	- 51,95	- 16,32	- 68,27
1893 I ...	+3,3314	-0,8913	-2,6177	-0,6504	+1,8088	-0,3409	+ 4,12	+ 5,68	+ 9,80
1893 II ...	+0,9098	-1,7967	+4,7114	+0,7703	-1,8557	+0,4824	- 40,64	+ 4,77	- 35,87
1895 III ...	+3,9464	-2,4972	-0,4581	+0,0788	+0,7290	+1,2048	+ 70,38	- 70,59	- 0,21
1895 IV ...	+2,4749	-2,7561	+2,5198	+0,8045	+0,7599	+1,3685	- 6,58	+ 4,16	- 2,42
1896 I ...	+2,3562	-0,1774	-2,1414	-0,9567	+1,5707	-1,1538	- 2,21	+ 13,46	+ 11,25
1896 III ...	+1,6108	-0,5016	-1,3306	-0,8347	+1,1653	-0,8331	- 2,82	+ 17,83	+ 15,01
1896 IV ...	+1,7977	-1,6197	+0,3551	+0,0474	+0,3225	+0,3705	- 57,20	+ 55,55	- 1,65
1897 I ...	+0,3697	+0,6498	+2,0082	-0,5791	-0,5041	-1,9135	+ 265,46	-116,04	+149,42
1897 III ...	+0,5559	-0,9150	+1,8777	+0,2187	-0,4388	-0,3073	- 30,69	- 18,02	- 48,71
1898 V ...	+3,6522	-1,2730	-3,1740	-0,5250	+2,0870	+0,0708	+ 9,11	- 1,07	+ 8,04
1898 VI ...	+2,6312	-2,1170	+2,3276	+0,4069	-0,6638	+0,7869	- 10,60	+ 7,61	- 2,99

Valeurs numériques du terme N_1 (suite et fin).

Astre.	$a.$	$b.$	$c.$	$\alpha.$	$\beta.$	$\gamma.$	N_1		
							Partie algébrique.	Partie trans- cendante.	Total.
1898 VII...	+1,3982	-1,1924	+1,5121	+0,5337	-0,2561	+0,0210	- 33,32	+ 1,16	- 32,16
1898 VIII...	+3,7640	-2,0284	+0,3137	-0,3032	+0,3431	-0,9528	+ 216,40	-211,79	+ 4,61
1898 IX...	+3,1113	-1,5972	-1,9873	-0,8196	+1,4937	+0,2387	+ 5,71	- 1,72	+ 3,99
1898 X...	+1,2135	+0,4619	-0,1886	-0,9083	+0,5943	-1,7742	- 375,78	+411,59	+ 35,81
1899 I...	+0,1780	+0,2123	+2,8180	-0,2099	-0,9090	-1,5835	+ 33,25	- 20,86	+ 12,39
1899 V...	+1,6515	-0,8982	-0,6811	-0,1979	+0,8406	-0,2620	- 22,72	+ 31,86	+ 9,14
1900 I...	+0,3459	-0,2569	+4,1377	+0,0351	-1,5689	-0,9723	+ 15,02	- 25,52	- 10,50
1900 II...	+0,9525	-0,2662	+0,2440	-0,2676	+0,3780	-1,0090	+ 267,80	-253,88	+ 13,92
1901 I...	+3,6190	-2,4047	-1,5534	-0,1565	+1,2767	+1,0232	+ 5,58	- 5,17	+ 0,41
1902 III...	+2,7883	-3,1446	+2,4363	+0,9173	-0,7182	+1,7866	- 16,08	+ 11,11	- 4,97
1903 I...	+0,7134	-0,9929	+3,8703	+0,7594	-1,4351	-0,3633	- 23,19	- 2,64	- 25,83
1903 II...	+2,4516	-0,8755	+2,3304	+0,7091	-0,6652	-0,0843	- 26,21	- 3,92	- 30,13
1903 III...	+1,4087	-0,3338	-0,9729	-0,7267	+0,9865	-1,0076	- 14,54	+ 28,96	+ 14,42
1903 IV...	+0,3211	+0,0258	+1,7018	-0,3825	-0,3509	-1,3931	+ 52,66	- 27,36	+ 25,30

7. — Calcul numérique de l'intégrale partielle N_2 .

Pour effectuer ce calcul, on a mis à profit le fait que $\varepsilon = \left(\frac{a_1}{r_m}\right)^{\frac{1}{2}}$, dans le cas actuel où la planète perturbatrice est Jupiter, est sensiblement constant pour les différentes valeurs de q ; on a vérifié, en effet, que l'on avait $0,485 < \varepsilon < 0,505$, pour q inférieur à 2,5.

Aussi a-t-on convenu de considérer, dans le calcul, ε comme une constante égale à 0,495; on a suivi ensuite la marche ci-dessous (voir p. 35) :

Soient v_m l'anomalie vraie de la comète et ζ_m l'anomalie moyenne de Jupiter pour l'époque t_m ; en posant $u_m = v_m + \omega$, $z_m = \zeta_m - \Omega$,

$$\left. \begin{aligned} G_m &= f(z_m, u_m) \\ H_m &= f\left(z_m + \frac{\pi}{2}, u_m\right) \\ P_m &= f\left(z_m, \omega + \frac{v_m}{2} + \frac{\pi}{2}\right) \\ Q_m &= f\left(z_m + \frac{\pi}{2}, \omega + \frac{v_m}{2} + \frac{\pi}{2}\right) \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\text{qu'on a vérifiés à l'aide de la relation} \\ &G_m Q_m - H_m P_m = \cos i \cos \frac{v_m}{2}, \end{aligned}$$

$$\delta_m = [1,0600 - (9,6902) G_m]^{\frac{1}{2}},$$

$$\varphi_m = \frac{1}{\delta_m^2} \left[(9,7115) P_m + (0,4771) H_m + (0,3222_n) \sin \frac{v_m}{2} \right],$$

$$\chi_m = \frac{1}{\delta_m^2} [(9,7115) Q_m + (0,1824_n) G_m + (8,9545_n)] + (9,3100) \varphi^2,$$

il vient, en secondes d'arc,

$$N_2 = (0,8451) \frac{q}{\delta_m^3} \{ (9,8451) P_m + (8,7784_n) H_m \\ + \varphi [(9,5354) Q_m + (9,9875) G_m] + \chi [(9,8220) P_m + (0,2756) H_m] \}$$

(les quantités entre parenthèses représentent des logarithmes).

Voici le relevé des résultats ainsi obtenus :

Valeurs numériques du terme N_2 .

Astre.	Log G_m .	Log H_m .	Log P_m .	Log Q_m .	Log φ .	Log χ .	N_2 .
1771.....	9,1872 n	9,9874 n	9,5459	9,9624	9,7757 n	9,7891	— 4,06
1802.....	9,5606 n	9,8318 n	9,7323	9,8330	9,3654	9,8248	— 1,25
1804.....	9,9127	9,7580	9,9343 n	9,6550 n	0,7025	0,4487	+ 56,39
1806 II.....	9,8863 n	9,5401 n	9,8334	9,7387	9,9748	0,0531	— 1,14
1810.....	9,5779 n	9,8610	9,3434	9,8262 n	0,5425	0,4143	+ 9,59
1813 I.....	9,9885	9,3220 n	9,9996 n	8,6444	0,1991	0,3319 n	+ 34,18
1813 II.....	9,7027 n	9,5253	9,8292	9,5805 n	0,4142	0,2413	+ 4,13
1818 II.....	9,6635	9,7916	9,5615 n	9,6784 n	0,6479	0,4463	+ 39,17
1818 III.....	9,9242 n	9,7104 n	9,9055	9,7739	9,8017	0,0403	— 0,91
1819 II.....	9,9121	9,5428	9,9395 n	9,5449 n	0,6091	0,0336	+ 9,78
1821.....	9,0253	9,9972 n	9,0895 n	9,9945	9,9730 n	9,6382	— 0,82
1822 I.....	9,9892 n	9,3424 n	9,9757	9,4854	0,0922	0,1209	— 0,16
1823.....	9,2596 n	9,8777 n	9,2095	9,9127	8,9011 n	9,7244	— 0,70
1824 I.....	9,9909 n	9,2284 n	9,9705	9,4178	0,1230	0,1324	— 0,15
1824 II.....	9,7965 n	8,9881	9,7003 n	9,4414	0,1828	0,0820	— 6,07
1825 I.....	9,8700 n	9,4047	9,8363	8,9345 n	0,3478	0,2333	+ 1,44
1826 II.....	9,6703	9,8743	9,8015	9,7064 n	0,7404	0,6898	+ 202,57
1826 IV.....	9,9100	9,7140 n	9,8526 n	9,8286	9,3217	0,1680 n	+ 20,85
1827 I.....	9,6161 n	9,9467 n	9,5619	9,9341	9,4903 n	9,9012	— 1,99
1827 II.....	9,8984 n	9,5912	9,9506	9,4166 n	0,4062	0,3015	+ 3,49
1830 I.....	9,9740	9,4683	9,9958 n	9,0236 n	0,6080	9,8581	+ 38,72
1830 II.....	9,5882	9,9140	9,5319 n	9,9351 n	0,7019	0,5892	+ 5,70
1832 II.....	8,7868	9,9178 n	9,4265 n	9,9327	9,7502 n	9,4979	— 7,00
1834.....	9,7809	9,8980 n	9,6763 n	9,9422	9,8505 n	9,7983 n	+ 1,19
1835 I.....	9,9710 n	9,4929	9,9955	7,3222	0,3548	0,2845	+ 7,73
1840 I.....	9,5006	9,7246	9,6669 n	9,6435 n	0,5782	0,3105	+ 8,38
1840 III.....	9,9325 n	9,5595 n	9,8995	9,4742	9,9711	0,0422	— 0,81
1842 II.....	6,0000 n	9,5609	9,0839	9,6488 n	0,4838	0,2023	+ 2,65
1843 II.....	9,5275	9,9446	9,6693 n	9,8551 n	0,6935	0,5901	+ 70,53
1844 II.....	9,7434 n	9,7395 n	9,6747	9,8480	9,6911	9,9480	— 1,64
1844 III.....	9,9935	9,0994 n	9,9905 n	9,3073	0,3205	0,2254 n	— 11,90
1845 I.....	9,9429 n	8,8567	9,8935	9,3478 n	0,2539	0,1510	— 0,68
1845 II.....	9,4623 n	9,8236 n	9,6933	9,8288	9,3857	9,7731	— 1,18
1845 III.....	9,8237 n	8,4393	9,8194	9,0374	0,2563	0,1372	+ 0,05
1846 V.....	9,5810	9,6440	9,1306 n	9,7076 n	0,5750	0,2591	+ 23,12
1846 VIII....	9,6508 n	9,7712 n	9,7295	9,6264	9,6438	9,8272	— 0,91
1847 I.....	9,2751 n	9,8109 n	9,3642	9,8063	9,3798	9,6706	— 0,07
1847 II.....	9,4161 n	9,4854	9,7200	9,6021 n	0,4271	0,1886	+ 8,38
1847 III.....	9,6821 n	9,5622	9,4997	9,2135 n	0,4015	0,2375	+ 3,62

Valeurs numériques du terme N₂ (suite).

Astre.	Log G _m .	Log H _m .	Log P _m .	Log Q _m .	Log φ .	Log χ .	N ₂ .
1847 IV.....	9,8316	9,6808 <i>n</i>	9,9092 <i>n</i>	9,3943	9,3644	0,1326 <i>n</i>	+ 26,65
1847 VI.....	9,6367 <i>n</i>	8,9791 <i>n</i>	9,5247	9,2105	0,1900	0,0013	— 0,45
1848 I.....	9,0406 <i>n</i>	8,7582 <i>n</i>	7,8062	9,0817	0,2353	9,8623	— 0,34
1849 I.....	9,7416	9,4807 <i>n</i>	9,8259 <i>n</i>	9,5983	0,0058	9,8504 <i>n</i>	+ 9,09
1849 II.....	9,7556 <i>n</i>	9,3640	9,8008	9,6157 <i>n</i>	0,3591	0,1721	+ 0,58
1850 I.....	9,9559 <i>n</i>	9,0906	9,9776	9,3554 <i>n</i>	0,2863	0,1882	+ 0,58
1850 II.....	9,8680	9,3387 <i>n</i>	9,8440 <i>n</i>	9,5703	0,1807	9,9974 <i>n</i>	+ 11,36
1851 III.....	9,8895 <i>n</i>	9,3506 <i>n</i>	9,8933	8,1106	0,0924	0,0310	— 1,04
1851 IV.....	9,6085 <i>n</i>	9,6669 <i>n</i>	9,5980	9,5979	9,8561	9,8364	— 0,21
1852 II.....	9,2111 <i>n</i>	9,8687	9,5424	9,8723 <i>n</i>	0,5918	0,4650	+ 17,32
1853 III.....	9,5634 <i>n</i>	9,9682	9,4927	9,9771 <i>n</i>	0,6087	0,5251	+ 6,17
1853 IV.....	9,4111	9,6910	9,2345 <i>n</i>	9,6960 <i>n</i>	0,5709	0,3095	+ 2,42
1854 I.....	9,9618 <i>n</i>	8,5465 <i>n</i>	9,9892	9,2546	0,2001	0,1578	+ 1,61
1854 II.....	9,0306	9,6383 <i>n</i>	9,0792 <i>n</i>	9,5203	9,8545	9,9834	— 1,47
1854 III.....	9,5303	8,5988	9,4316 <i>n</i>	9,2989 <i>n</i>	0,3603	9,4472	+ 2,03
1855 II.....	9,8428	9,8302 <i>n</i>	9,9047 <i>n</i>	9,7519	9,7112 <i>n</i>	0,0573 <i>n</i>	+ 6,48
1857 I.....	9,9026 <i>n</i>	9,1408	9,8289	9,0817 <i>n</i>	0,2888	0,1774	— 0,19
1857 III.....	9,5725 <i>n</i>	9,9167 <i>n</i>	9,4542	9,9069	9,2993 <i>n</i>	9,8617	— 1,35
1858 IV.....	9,6820 <i>n</i>	9,1366	9,5664	8,6304 <i>n</i>	9,3145	9,6875	+ 1,02
1859.....	9,5973	9,1656 <i>n</i>	9,5080 <i>n</i>	8,9773	0,2341	9,1544 <i>n</i>	+ 0,99
1860 II.....	9,8095	9,4588	9,8884 <i>n</i>	8,9455 <i>n</i>	0,5261	9,9038	+ 20,90
1860 III.....	8,9633 <i>n</i>	9,2688	8,1614 <i>n</i>	9,3631 <i>n</i>	0,3775	0,0410	— 0,09
1861 III.....	9,5023	9,9752	9,2327 <i>n</i>	9,9830 <i>n</i>	0,7253	0,6609	+ 50,23
1862 II.....	9,9733	9,5101 <i>n</i>	9,9952 <i>n</i>	9,0645	9,9661	0,3547 <i>n</i>	+ 45,55
1862 IV.....	9,8483	9,4617 <i>n</i>	9,8974 <i>n</i>	9,0889	0,0414	0,1116 <i>n</i>	+ 15,36
1863 I.....	8,8633 <i>n</i>	9,1038	9,0461 <i>n</i>	8,8704 <i>n</i>	0,3378	9,9785	— 0,67
1863 II.....	9,2740 <i>n</i>	9,9428	9,4760	9,9637 <i>n</i>	0,6225	0,5248	+ 25,87
1863 III.....	9,1608 <i>n</i>	9,3657	9,2927	9,5832 <i>n</i>	0,4040	0,0980	+ 0,53
1863 IV.....	9,7436	9,8901 <i>n</i>	9,7327 <i>n</i>	9,9199	9,8366 <i>n</i>	9,7364 <i>n</i>	+ 0,68
1863 V.....	9,6492	9,8160 <i>n</i>	9,4804 <i>n</i>	9,7905	8,8285 <i>n</i>	9,7290 <i>n</i>	+ 0,39
1863 VI.....	8,8513 <i>n</i>	9,4854	8,9284 <i>n</i>	9,0671 <i>n</i>	0,4243	0,1468	+ 2,91
1864 I.....	9,9958	9,1146 <i>n</i>	9,9987 <i>n</i>	8,0531	0,3072	0,2853 <i>n</i>	+ 30,37
1864 III.....	9,5340	9,2543 <i>n</i>	9,7031 <i>n</i>	8,8235	0,1483	9,3829 <i>n</i>	+ 2,47
1864 IV.....	9,9198 <i>n</i>	9,3768	9,8560	9,5483 <i>n</i>	0,3311	0,2081	— 0,03
1864 V.....	9,7888	9,8903 <i>n</i>	9,8897 <i>n</i>	9,7970	9,9555 <i>n</i>	9,8812 <i>n</i>	+ 3,26
1865 I.....	9,2867 <i>n</i>	9,5813 <i>n</i>	9,2430	9,5519	9,9566	9,7017	— 0,03
1867 III.....	9,8706	9,7838 <i>n</i>	9,8558 <i>n</i>	9,7572	9,1934 <i>n</i>	0,1220 <i>n</i>	+ 6,13
1868 II.....	9,7795	9,8336 <i>n</i>	9,8132 <i>n</i>	9,7475	9,6052 <i>n</i>	9,9570 <i>n</i>	+ 5,01
1869 II.....	9,7626 <i>n</i>	9,7770	9,8602	9,7692 <i>n</i>	0,4957	0,3739	+ 10,44
1870 I.....	9,4606	9,8824 <i>n</i>	9,6480 <i>n</i>	9,8963	9,7071 <i>n</i>	8,9154 <i>n</i>	— 3,24
1870 II.....	9,9363	8,2900	9,9869 <i>n</i>	8,8865 <i>n</i>	0,3905	0,0148 <i>n</i>	+ 48,68
1871 II.....	9,7227	9,1850	9,5096 <i>n</i>	9,2700 <i>n</i>	0,4652	9,7029	+ 11,77
1873 V.....	9,7489 <i>n</i>	9,3936 <i>n</i>	9,7497	9,5682	0,0862	0,0080	— 0,34
1874 II.....	9,9897 <i>n</i>	9,3228	9,9950	8,5340 <i>n</i>	0,3176	0,2498	+ 1,80
1874 III.....	9,9948 <i>n</i>	8,9685	9,9759	9,2140 <i>n</i>	0,2636	0,1899	+ 0,09
1874 V.....	9,3619 <i>n</i>	9,8792 <i>n</i>	9,6003	9,8030	8,1126 <i>n</i>	9,6995	— 1,40
1874 VI.....	9,8350 <i>n</i>	9,6831	9,8818	9,6958 <i>n</i>	0,4480	0,3233	+ 2,46
1877 I.....	9,9783	9,4833 <i>n</i>	9,9957 <i>n</i>	9,1354	0,0313	0,3493 <i>n</i>	+ 38,55

Valeurs numériques du terme N_2 (suite).

Astre.	Log G_m .	Log H_m .	Log P_m .	Log Q_m .	Log φ .	Log χ .	N_2 .
1877 II	9,6768	9,3845	9,5770 <i>n</i>	9,6305 <i>n</i>	0,4950	9,8729	+ 7,61
1877 III.	9,7391	9,7735 <i>n</i>	9,6131 <i>n</i>	9,7227	8,8702	9,9157 <i>n</i>	+ 9,51
1877 VI.	9,8878 <i>n</i>	9,7976 <i>n</i>	9,8345	9,8037	9,5321	0,0023	- 2,55
1879 II	9,7374 <i>n</i>	9,8464	9,8060	9,8561 <i>n</i>	0,5292	0,4175	+ 9,64
1879 VI.	9,5915	9,3306 <i>n</i>	9,5105 <i>n</i>	8,1644	0,1551	9,5588 <i>n</i>	+ 4,80
1879 V.	9,8439	9,5628 <i>n</i>	9,7318 <i>n</i>	9,5534	9,9746	0,0675 <i>n</i>	+ 18,49
1880 II	9,8384 <i>n</i>	9,8600	9,8902	9,7597 <i>n</i>	0,5154	0,4260	+ 20,58
1880 III.	9,4205 <i>n</i>	9,9729	9,5502	9,9482 <i>n</i>	0,6312	0,5578	+ 9,67
1881 IV.	9,8667	9,7350 <i>n</i>	9,8906 <i>n</i>	9,5998	8,7463	0,1572 <i>n</i>	+ 13,25
1881 VI.	9,0069	9,9685 <i>n</i>	9,2258 <i>n</i>	9,9819	9,8981 <i>n</i>	9,5731	- 3,40
1882 I.	9,8847	9,5188	9,9019 <i>n</i>	9,5115 <i>n</i>	0,5924	0,0183	+ 1,50
1882 III.	7,5563	9,2754 <i>n</i>	9,1550 <i>n</i>	8,4425	0,1254	9,4570	- 1,23
1883 I.	9,5591	9,7687	9,5184 <i>n</i>	9,6421 <i>n</i>	0,6170	0,4010	+ 18,00
1883 II	9,8272	9,7847	9,7748 <i>n</i>	9,7913 <i>n</i>	0,6932	0,4789	+ 13,85
1885 II	9,9818 <i>n</i>	8,7084 <i>n</i>	9,9962	8,3598	0,2011	0,1517	+ 0,23
1885 V.	9,8396 <i>n</i>	9,5995 <i>n</i>	9,9159	9,3811	9,9608	9,9762	- 0,59
1886 I.	8,6902 <i>n</i>	9,9270	8,1761	9,8721 <i>n</i>	0,6289	0,5220	+ 15,98
1886 II	9,5815 <i>n</i>	9,8011	9,4863	9,7431 <i>n</i>	0,5203	0,3815	+ 4,05
1886 III.	9,6390 <i>n</i>	9,4216	9,7782	9,4373 <i>n</i>	0,3947	0,2031	+ 2,26
1886 VIII.	9,5000 <i>n</i>	9,5480	9,6387	9,7262 <i>n</i>	0,4352	0,2072	+ 3,77
1886 IX.	9,3379	9,3736 <i>n</i>	9,2925 <i>n</i>	8,8195	0,1203	8,7101 <i>n</i>	+ 1,07
1887 III.	9,8129	9,6989	9,7431 <i>n</i>	9,8290 <i>n</i>	0,6438	0,3085	+ 27,77
1888 III.	9,4815	8,9913 <i>n</i>	9,4901 <i>n</i>	9,4748	0,2444	9,2854	+ 2,98
1889 I.	9,9167 <i>n</i>	9,7472	9,9793	9,4782 <i>n</i>	0,4550	0,3711	+ 14,47
1889 II	9,9794 <i>n</i>	9,1882 <i>n</i>	9,9273	9,6713	0,1075	0,1412	- 0,04
1890 I.	9,8838	9,6438 <i>n</i>	9,8818 <i>n</i>	9,7140	9,7372	0,1405 <i>n</i>	+ 6,14
1890 II	9,6644	9,5292 <i>n</i>	9,7185 <i>n</i>	8,6149	9,9355	9,8887 <i>n</i>	+ 14,31
1890 III.	9,0832 <i>n</i>	9,7441 <i>n</i>	9,3881	9,6245	9,6705	9,5084	- 0,31
1890 VI.	9,9474	9,6262	9,9477 <i>n</i>	9,6624 <i>n</i>	0,6582	0,1915	+ 51,31
1891 I.	8,2833	9,9919	8,7042	9,9982 <i>n</i>	0,6824	0,6156	+ 16,04
1891 IV.	8,8007 <i>n</i>	9,6299 <i>n</i>	9,1239	9,3679	9,8862	9,3749	- 0,22
1892 I.	9,9127	9,5025 <i>n</i>	9,8894 <i>n</i>	9,7059	0,0233	0,1464 <i>n</i>	+ 27,67
1892 II	9,7925 <i>n</i>	9,8684	9,7336	9,8042 <i>n</i>	0,5177	0,4161	+ 18,99
1892 VI.	9,8667 <i>n</i>	9,7143 <i>n</i>	9,9230	9,5160	9,8150	9,9689	- 0,68
1893 I.	9,2299 <i>n</i>	9,9112	9,5839	9,8531 <i>n</i>	0,6122	0,5118	+ 29,87
1893 II	9,4011	9,9619 <i>n</i>	9,6226 <i>n</i>	9,9349	9,9814 <i>n</i>	9,1900	- 5,56
1895 III.	9,8767	9,4501	9,8168 <i>n</i>	9,2490 <i>n</i>	0,5697	9,9514	+ 21,57
1895 IV.	9,8607	9,5545 <i>n</i>	9,8771 <i>n</i>	9,4312	9,9500	0,1260 <i>n</i>	+ 4,04
1896 I.	9,8284 <i>n</i>	9,8649	9,8922	9,7958 <i>n</i>	0,5264	0,4389	+ 7,03
1896 III.	9,7273 <i>n</i>	9,9049	9,6688	9,9415 <i>n</i>	0,5531	0,4493	+ 6,49
1896 IV.	8,3674	9,5976	8,7723 <i>n</i>	9,7742 <i>n</i>	0,4845	0,1730	+ 3,24
1897 I.	9,9511 <i>n</i>	9,5663 <i>n</i>	9,8873	9,7173	9,9515	0,0756	- 1,10
1897 III.	9,5075	9,2679	9,5751 <i>n</i>	8,7959	0,4239	9,9197	+ 7,70
1898 V.	9,2049 <i>n</i>	9,9884	9,6176	9,9549 <i>n</i>	0,6562	0,5933	+ 55,40
1898 VI.	9,7822	9,6410 <i>n</i>	9,8040 <i>n</i>	9,7400	9,7504	9,9498 <i>n</i>	+ 7,43
1898 VII.	9,5212 <i>n</i>	9,1897 <i>n</i>	9,6736	8,9474 <i>n</i>	0,1662	9,8699	- 1,43
1898 VIII.	9,9816	9,1467	9,9880 <i>n</i>	9,2536	0,5081	9,5412 <i>n</i>	+ 93,18
1898 IX.	9,4623	9,9810	9,5905 <i>n</i>	9,9634 <i>n</i>	0,7140	0,6411	+ 20,97

F.

11

Valeurs numériques du terme N₂ (suite et fin.).

Astre.	Log G _m .	Log H _m .	Log P _m .	Log Q _m .	Log φ.	Log χ.	N ₂ .
1898 X.....	9,9507 <i>n</i>	9,3979	9,9440	8,9504 <i>n</i>	0,3385	0,2522	+ 1,52
1899 I.....	9,9178 <i>n</i>	9,7067 <i>n</i>	9,8921	9,7592	9,8158	0,0362	— 0,39
1899 V.....	9,6151 <i>n</i>	9,7829	9,6380	9,8931 <i>n</i>	0,5069	0,3453	+ 11,37
1900 I.....	9,9438 <i>n</i>	9,0906	9,9656	8,9836	0,2853	0,2120	+ 2,23
1900 II.....	9,8839 <i>n</i>	9,5099	9,9005	9,6654 <i>n</i>	0,3784	0,2428	+ 1,53
1901 I.....	9,7852	9,8196	9,7584 <i>n</i>	9,8639 <i>n</i>	0,6952	0,5031	+ 10,34
1902 III.....	9,9421	9,6804 <i>n</i>	9,9654 <i>n</i>	9,5616	9,4262	0,2880 <i>n</i>	+ 14,48
1903 I.....	9,7202 <i>n</i>	9,9117 <i>n</i>	9,7879	9,8628	8,5945 <i>n</i>	9,9154	— 0,84
1903 II.....	9,8281 <i>n</i>	9,8363 <i>n</i>	9,8889	9,7848	9,4720	9,9619	— 3,12
1903 III.....	9,7247 <i>n</i>	9,8849	9,6988	9,9223 <i>n</i>	0,5453	0,4366	+ 5,56
1903 IV.....	9,8953 <i>n</i>	8,6128	9,8473	8,6712 <i>n</i>	0,2498	0,1441	— 0,18

8. — *Calcul numérique de l'intégrale partielle N₃.*

On a utilisé à cet effet les formules suivantes qui résultent du paragraphe 10 de la première Partie (p. 40).

En posant successivement

$$\zeta_0 - \Omega = z_0, \quad n_0 t_2 = \theta_2, \quad V_0 - \zeta_0 = \delta_0, \quad \left(\frac{a_0}{q}\right)^2 = \mu;$$

$$I_0 = f(z_0 + \delta_0, \omega),$$

$$J_0 = f\left(z_0 + \delta_0, \omega + \frac{\pi}{2}\right),$$

$$K_0 = f\left(z_0 + \delta_0 + \frac{\pi}{2}, \omega\right),$$

$$L_0 = f\left(z_0 + \delta_0 + \frac{\pi}{2}, \omega + \frac{\pi}{2}\right),$$

quantités fournies par la Table I et qui ont été vérifiées à l'aide de la relation

$$I_0 L_0 - J_0 K_0 = \cos i,$$

puis

$$S_0 = q K_0,$$

$$S'_0 = q(\sqrt{2} \mu^3 L_0 - I_0),$$

$$S''_0 = -q \mu^3 (K_0 \mu^3 + 2 \sqrt{2} J_0),$$

$$M_0 = \rho_0^2 \quad \left(\text{déjà calculé dans le terme } \frac{pm_1}{\rho_0}\right),$$

$$M'_0 = -2 \alpha_0 q (K_0 + \sqrt{2} \mu^3 J_0),$$

$$M''_0 = 2 \alpha_0 q \mu^3 (\mu^3 I_0 + \mu - 2 \sqrt{2} L_0),$$

on obtient (p. 42)

$$N_3 = \frac{\rho m_1 a_0 \theta_2}{\rho_0^3} \left[\left(S_0 + \frac{\theta_2 S'_0}{2} \right) \left(1 - \frac{M'_0}{\rho_0^2} \theta_2 \right) + \frac{\theta_2 S_0}{4 \rho_0^2} (M'_0 - \theta_2 M''_0) + \frac{\theta_2^2}{24} \left(4 S''_0 + 15 S_0 \frac{M_0'^2}{\rho_0^4} \right) \right].$$

En appliquant cette dernière formule à celles des comètes pour lesquelles q dépasse l'unité, on a obtenu les résultats suivants :

Tableau relatif aux valeurs de l'intégrale N_3 .

Astre.	$\log q$.	$\delta_0 = V_0 - \zeta_0$.	lI_0 .	lJ_0 .	lK_0 .	lL_0 .	N_3 .
1802	0,0391	+2.25'.29"	9,9360 <i>n</i>	8,3059	9,5853	9,7930 <i>n</i>	+ 0,03
1804	0,0303	-1.25.58	9,8058	9,8201	9,8131 <i>n</i>	9,2827	- 3,54
1806 II.....	0,0342	-5.27.48	9,9570 <i>n</i>	9,4431	9,0295	9,9450	+ 3,62
1813 II.....	0,0855	+4.47.55	8,8431	9,0987	9,9539	9,6409 <i>n</i>	- 0,69
1818 II.....	0,0787	-5.25.23	9,5675	9,9444	9,1423 <i>n</i>	9,1248 <i>n</i>	+ 4,04
1824 II.....	0,0211	+5.23.40	9,3935 <i>n</i>	9,9713	9,7056 <i>n</i>	9,5382 <i>n</i>	+ 1,68
1826 II.....	0,3027	+1.51.10	9,6538	9,9272	9,7936 <i>n</i>	9,7221	+ 8,11
1832 II.....	0,0730	-1.35.16	9,6808 <i>n</i>	9,7371 <i>n</i>	9,9160 <i>n</i>	9,7394	+11,18
1835 I.....	0,3097	+4.16.57	9,8172 <i>n</i>	9,8769	9,8737	9,8074	- 1,66
1843 II.....	0,2085	-4.37.28	9,8498	9,7966	9,3890 <i>n</i>	9,8143	- 0,46
1845 II.....	0,0985	+0.35.38	9,9479 <i>n</i>	9,0987	9,4200	9,8150 <i>n</i>	- 3,00
1846 V.....	0,1386	+3.35.46	9,6322	9,5934	9,5535	9,9546 <i>n</i>	+ 0,16
1847 II.....	0,3253	+5.18.36	9,1617	9,0675	9,9289	9,7198 <i>n</i>	- 1,05
1847 III.....	0,2470	+5.26.15	8,9777 <i>n</i>	9,6240	8,9754	9,9571	+ 5,40
1847 IV.....	0,1717	+5.26.15	9,5434	9,9661 <i>n</i>	9,9106 <i>n</i>	9,3446 <i>n</i>	+16,23
1849 II.....	0,0642	+4. 4.38	9,4691	9,7484 <i>n</i>	9,9152	9,4216 <i>n</i>	- 8,47
1850 I.....	0,0340	+1.20.11	8,8986 <i>n</i>	9,5916 <i>n</i>	9,9987	8,6128 <i>n</i>	- 1,08
1854 I.....	0,3106	-5.31.54	9,8388 <i>n</i>	9,3028	9,8488	9,6023	- 0,55
1860 II.....	0,1162	+5.26.49	9,3421	9,8231	9,9204 <i>n</i>	9,7067	+ 0,80
1863 II.....	0,0286	-0.58. 3	9,8268	9,4254	9,8689	9,4879 <i>n</i>	+ 6,07
1863 VI.....	0,1183	-2.51.53	8,4031	9,6753	9,3938 <i>n</i>	9,9327	+ 3,31
1864 V.....	0,0471	-4.48.23	8,4750	9,9815 <i>n</i>	9,9998 <i>n</i>	8,3978 <i>n</i>	+ 8,55
1869 II.....	0,0902	+2.41. 7	8,8392	9,5808	9,9944	9,2021 <i>n</i>	+ 2,02
1870 I.....	0,0038	+4.29.16	9,6259 <i>n</i>	9,5828 <i>n</i>	9,9396 <i>n</i>	9,6284	+ 5,24
1870 II.....	0,2593	+4.43.11	9,7145	9,0208 <i>n</i>	9,9308 <i>n</i>	9,1393 <i>n</i>	- 0,94
1871 II.....	0,0348	+5.31.42	9,3938	9,5074	9,1620	9,9716 <i>n</i>	- 2,69
1877 III.....	0,0039	-5.19.30	9,4082 <i>n</i>	8,5125 <i>n</i>	9,6398 <i>n</i>	9,9483 <i>n</i>	- 7,38
1877 VI.....	0,1975	-5.31.16	9,8923 <i>n</i>	9,6767 <i>n</i>	9,3107	9,6244	+ 3,53
1880 II.....	0,2587	-0.38.18	8,6837 <i>n</i>	9,7926	9,9429	9,6042	- 3,80
1885 II.....	0,3993	+2.45. 4	9,4949 <i>n</i>	9,2620 <i>n</i>	9,9775	8,5509 <i>n</i>	- 7,77
1885 V.....	0,0333	+1.58.45	9,6226 <i>n</i>	9,7702 <i>n</i>	9,9120	9,7615 <i>n</i>	- 7,51
1886 VIII....	0,1703	-0.45.34	9,6299	9,4994 <i>n</i>	9,8692	9,6206 <i>n</i>	-12,76
1887 III.....	0,0028	-1.38.48	9,3086 <i>n</i>	9,8719 <i>n</i>	9,9550 <i>n</i>	9,5974	+11,81
1889 I.....	0,2589	-5.14.24	9,6216 <i>n</i>	9,9442	9,9575	9,6230	- 3,60
1889 II.....	0,3532	-5.28.59	9,9357 <i>n</i>	9,6896	9,6580	9,9354	+ 2,38
1890 II.....	0,2805	-5. 9.11	9,6833	9,9203 <i>n</i>	9,5501 <i>n</i>	9,6728 <i>n</i>	-14,83
1890 VI.....	0,1004	-4.43.50	9,9197	9,2555	9,6764 <i>n</i>	9,4193 <i>n</i>	-12,31
1892 I.....	0,0115	-0.55.53	9,3179 <i>n</i>	9,9079	9,9754 <i>n</i>	8,3263 <i>n</i>	- 0,31
1892 II.....	0,2946	-0.38.18	9,3554	9,4843	9,7662	9,8560	+ 0,87
1893 I.....	0,0774	+1.23.58	9,3290	9,9765	9,8933	9,4951 <i>n</i>	+ 3,29

Tableau relatif aux valeurs de l'intégrale N_2 (suite).

Astre.	$\log q.$	$\delta_0 = V_0 - \zeta_0.$	$lI_0.$	$lJ_0.$	$lK_0.$	$lL_0.$	$N_3.$
1896 IV	0,0580	+4.38.14"	9,8684	9,8014n	9,3112	9,0744n	- 8,35
1897 I	0,0264	+3.33.11	9,9207n	9,1915	9,4987	9,9651	+ 3,82
1897 III	0,1325	+1.31.25	9,1297n	9,9239	9,6902n	9,6078	+ 1,36
1898 V	0,1765	-0.11.22	9,6740	9,9333	9,9436	9,6793n	+ 5,55
1898 VII	0,2309	-0.34.17	8,9741	9,8026n	9,8141	9,7350n	-23,62
1898 VIII	0,3588	-0.36.59	9,1810n	9,9656	9,9948n	9,1166n	+ 9,07
1899 V	0,2115	-3. 8.58	9,8169	9,4285n	9,8657	7,9630	-11,85
1900 I	0,1245	-4.24.38	9,8424n	9,8371	9,8284	9,7185	+ 2,01
1900 II	0,0064	-4.49.18	9,1206	9,6803n	9,9863	9,0878n	- 2,26
1903 II	0,4432	-3.27.53	9,9322n	9,5371n	9,7113	9,8147n	- 9,81

On va maintenant donner le relevé qui permet de calculer $\Delta(e)$.

9. — Tableau récapitulatif et calcul de $\Delta(e)$.

Astre.	(Terme indépendant de ρ). $\Delta_1(e).$	Termes dépendant de ρ .					$\Delta(e) = \Delta_1(e) + \Delta_2(e).$	
		$\frac{pm_1}{\rho_0}$	$N_1.$	$N_2.$	$N_3.$	$\Delta_2(e).$	En arc.	En longueur.
1771	- 1,29	+ 58,65	- 20,77	- 4,06		+ 33,82	+ 32,53	+ 1577.10 ⁻⁷
1802	+ 31,67	67,39	- 16,93	- 1,25	+ 0,03	+ 49,24	+ 80,91	+ 3923
1804	-109,00	87,41	+ 3,00	+ 56,39	- 3,54	+143,26	+ 34,26	+ 1661
1806 II	+ 67,05	69,20	+ 35,19	- 1,14	+ 3,62	+106,87	+ 173,92	+ 8432
1810	+ 57,69	82,85	+ 33,91	+ 9,59		+126,35	+ 184,04	+ 8922
1813 I	- 56,21	55,48	- 8,87	+ 34,18		+ 80,79	+ 24,58	+ 1192
1813 II	+ 64,76	89,20	+ 3,96	+ 4,13	- 0,69	+ 96,60	+ 161,36	+ 7823
1818 II	-102,85	95,63	+ 3,14	+ 39,17	+ 4,04	+141,98	+ 39,13	+ 1897
1818 III	+ 69,43	56,46	- 9,33	- 0,91		+ 46,22	+ 115,65	+ 5607
1819 II	- 6,10	27,45	+ 0,25	+ 9,78		+ 37,48	+ 31,38	+ 1521
1821	- 2,42	7,22	- 3,27	- 0,82		+ 3,13	+ 0,71	+ 34
1822 I	+ 51,03	36,83	+ 55,06	- 0,16		+ 91,73	+ 142,76	+ 6921
1823	+ 1,49	16,69	- 4,29	- 0,70		+ 11,70	+ 13,19	+ 640
1824 I	+ 58,11	41,16	+ 79,99	- 0,15		+121,00	+ 179,11	+ 8683
1824 II	-116,74	77,08	- 1,31	- 6,07	+ 1,68	+ 71,38	- 45,36	- 2199
1825 I	+ 52,80	61,54	+ 31,57	+ 1,44		+ 94,55	+ 147,35	+ 7144
1826 II	-144,44	162,15	+ 19,74	+202,57	+ 8,11	+392,57	+ 248,13	+12029
1826 IV	- 99,47	56,79	- 4,46	+ 20,85		+ 73,18	- 26,29	- 1275
1827 I	+ 26,06	33,80	- 69,45	- 1,99		- 37,64	- 11,58	- 561
1827 II	+ 46,04	55,37	+ 16,34	+ 3,49		+ 75,20	+ 121,24	+ 5878
1830 I	-119,37	74,36	+ 2,47	+ 38,72		+115,55	- 3,82	- 185
1830 II	- 3,95	9,90	+ 0,62	+ 5,70		+ 16,22	+ 12,27	+ 595
1832 II	- 7,29	82,89	- 23,88	- 7,00	+11,18	+ 63,19	+ 55,90	+ 2710
1834	- 55,87	33,85	- 4,92	+ 1,19		+ 30,12	- 25,75	- 1248
1835 I	+136,61	121,62	+ 62,32	+ 7,73	- 1,66	+190,01	+ 326,62	+15835
1840 I	- 23,20	47,66	+ 4,84	+ 8,38		+ 60,88	+ 37,68	+ 1827
1840 III	+ 78,69	+ 50,44	+921,15	- 0,81		+970,78	+1049,47	+50879.10 ⁻⁷

Astre.	(Terme indépendant de ρ). $\Delta_1(e)$.	Termes dépendant de ρ .					$\Delta(e) = \Delta_1(e) + \Delta_2(e)$.	
		$\frac{pm_1}{\rho_0}$	N_1 .	N_2 .	N_3 .	$\Delta_2(e)$.	En arc.	En longueur.
1842 II...	+ 2,81	+ 39,84	+ 0,36	+ 2,65		+ 42,85	+ 45,66	+ 2213. 10 ⁻⁷
1843 II...	- 75,39	156,07	+ 21,70	+ 70,53	- 0,46	+ 247,84	+ 172,45	+ 8361
1844 II...	+ 34,54	58,72	+ 3,65	- 1,64		+ 60,73	+ 95,27	+ 4619
1844 III...	- 32,59	20,35	- 0,64	+ 11,90		+ 31,61	- 0,98	- 48
1845 I...	+ 125,27	70,38	+ 223,08	- 0,68		+ 292,78	+ 418,05	+ 20267
1845 II...	+ 5,60	81,09	- 14,74	- 1,18	- 3,00	+ 62,17	+ 67,77	+ 3286
1845 III...	- 0,56	31,06	- 10,36	+ 0,05		+ 20,75	+ 20,19	+ 979
1846 V...	- 66,98	117,95	- 2,47	+ 23,12	+ 0,16	+ 138,76	+ 71,78	+ 3480
1846 VIII.	+ 67,74	70,19	+ 36,43	- 0,91		+ 105,71	+ 173,45	+ 8409
1847 I...	+ 0,59	3,27	- 0,95	- 0,07		+ 2,25	+ 2,84	+ 138
1847 II...	+ 62,16	158,48	- 6,48	+ 8,38	- 1,05	+ 159,33	+ 221,49	+ 10738
1847 III...	+ 73,21	124,14	+ 57,92	+ 3,62	+ 5,40	+ 191,08	+ 264,29	+ 12813
1847 IV...	- 57,82	120,88	- 51,22	+ 26,65	+ 16,23	+ 112,54	+ 54,72	+ 2653
1847 VI...	+ 15,00	24,46	+ 5,94	- 0,45		+ 29,95	+ 44,95	+ 2179
1848 I...	+ 2,95	23,59	+ 0,69	- 0,34		+ 23,94	+ 26,89	+ 1304
1849 I...	- 65,77	68,15	- 1,93	+ 9,09		+ 75,31	+ 9,54	+ 463
1849 II...	+ 99,95	88,67	+ 0,30	+ 0,58	- 8,47	+ 81,08	+ 181,03	+ 8777
1850 I...	+ 118,18	75,60	+ 19,30	+ 0,58	- 1,08	+ 94,40	+ 212,58	+ 10306
1850 II...	- 59,27	38,16	- 1,52	+ 11,36		+ 48,00	- 11,27	- 546
1851 III...	+ 111,13	68,46	- 67,59	- 1,04		- 0,17	+ 110,96	+ 5379
1851 IV...	+ 7,61	10,16	- 3,46	- 0,21		+ 6,49	+ 14,10	+ 684
1852 II...	+ 7,13	69,83	+ 4,67	+ 17,32		+ 91,82	+ 98,95	+ 4797
1853 III...	+ 17,47	23,86	+ 7,21	+ 6,17		+ 37,24	+ 54,71	+ 2652
1853 IV...	- 1,33	13,17	+ 0,47	+ 2,42		+ 16,06	+ 14,73	+ 714
1854 I...	+ 162,95	118,66	+ 32,05	+ 1,61	- 0,55	+ 151,77	+ 314,72	+ 15258
1854 II...	+ 0,23	20,90	- 4,73	- 1,47		+ 14,70	+ 14,93	+ 724
1854 III...	- 13,05	51,79	4,35	+ 2,03		+ 49,47	+ 36,42	+ 1766
1855 II...	- 35,37	44,79	- 11,27	+ 6,48		+ 40,00	+ 4,63	+ 224
1857 I...	+ 82,61	58,96	+ 87,05	- 0,19		+ 145,82	+ 228,43	+ 11075
1857 III...	+ 16,50	27,60	- 46,73	- 1,35		- 20,48	- 3,98	- 193
1858 IV...	+ 28,71	41,64	+ 13,41	+ 1,02		+ 56,07	+ 84,78	+ 4110
1859.....	- 8,72	15,43	- 1,44	+ 0,99		+ 14,98	+ 6,26	+ 303
1860 II...	- 122,00	100,56	+ 6,90	+ 20,90	+ 0,80	+ 129,96	+ 7,16	+ 347
1860 III...	+ 7,87	22,19	+ 2,15	- 0,09		+ 24,25	+ 32,12	+ 1557
1861 III...	- 34,44	71,04	+ 2,54	+ 50,23		+ 123,81	+ 89,37	+ 4333
1862 II...	+ 65,58	64,56	+ 35,34	+ 45,55		+ 145,45	+ 211,03	+ 10231
1862 IV...	- 35,74	61,08	- 11,91	+ 15,36		+ 64,53	+ 28,79	+ 1396
1863 I...	+ 9,03	58,00	+ 9,97	- 0,67		+ 67,30	+ 76,33	+ 3701
1863 II...	+ 21,47	87,66	+ 7,42	+ 25,87	+ 6,07	+ 127,02	+ 148,49	+ 7199
1863 III...	+ 22,11	47,09	- 1,21	+ 0,53		+ 46,41	+ 68,52	+ 3322
1863 IV...	- 49,67	47,74	- 8,05	+ 0,68		+ 40,37	- 9,30	- 451
1863 V...	- 41,61	48,30	- 9,71	+ 0,39		+ 38,98	- 2,63	- 128
1863 VI...	- 11,10	93,30	+ 18,95	+ 2,91	+ 3,31	+ 118,47	+ 107,37	+ 5205
1864 I...	- 56,18	48,98	- 4,78	+ 30,37		+ 74,57	+ 18,39	+ 892
1864 III...	+ 8,41	71,97	- 7,52	+ 2,47		+ 66,92	+ 75,33	+ 3652
1864 IV...	+ 91,51	57,22	+ 95,23	- 0,03		+ 152,42	+ 243,93	+ 11826
1864 V...	- 40,15	81,13	- 37,73	+ 3,26	+ 8,55	+ 55,21	+ 15,06	+ 730
1865 I...	+ 0,60	- 1,91	- 0,28	- 0,03		+ 1,60	+ 2,20	+ 107. 10 ⁻⁷

Astre.	(Terme indépendant de ρ). $\Delta_1(e)$.	Termes dépendant de ρ .					$\Delta(e) = \Delta_1(e) + \Delta_2(e)$.	
		$\frac{pm_1}{\rho_0}$.	N_1 .	N_2 .	N_3 .	$\Delta_2(e)$.	En arc.	En longueur.
1867 III...	— 30,08	+ 26,00	— 3,61	+ 6,13		+ 28,52	— 1,56=	— 76.10 ⁻⁷
1868 II...	— 33,27	45,88	— 11,70	+ 5,01		+ 39,19	+ 5,92	+ 287
1869 II...	+ 78,75	96,06	+ 13,47	+ 10,44	+ 2,02	+ 121,99	+ 200,74	+ 9732
1870 I...	— 33,82	71,59	— 14,74	— 3,24	+ 5,24	+ 58,85	+ 25,03	+ 1214
1870 II...	— 159,16	162,46	— 5,74	+ 48,68	— 0,94	+ 204,46	+ 45,30	+ 2196
1871 II...	— 59,87	84,73	— 4,51	+ 11,77	— 2,69	+ 89,30	+ 29,43	+ 1427
1873 V...	+ 15,52	26,65	+ 4,05	— 0,34		+ 30,36	+ 45,88	+ 2224
1874 II...	+ 68,42	58,61	+ 44,77	+ 1,80		+ 105,18	+ 173,60	+ 8416
1874 III...	+ 80,38	47,48	+ 97,78	+ 0,09		+ 145,35	+ 225,73	+ 10943
1874 V...	+ 33,03	62,92	— 30,36	— 1,40		+ 31,16	+ 64,19	+ 3112
1874 VI...	+ 38,59	36,78	+ 8,67	+ 2,46		+ 47,91	+ 86,50	+ 4194
1877 I...	— 62,01	64,54	— 9,54	+ 38,55		+ 93,55	+ 31,54	+ 1529
1877 II...	— 30,07	79,27	— 4,91	+ 7,61		+ 81,97	+ 51,90	+ 2516
1877 III...	— 66,96	70,75	— 11,11	+ 9,51	— 7,38	+ 61,77	— 5,19	— 252
1877 VI...	+ 136,61	95,07	— 81,39	— 2,55	+ 3,53	+ 14,66	+ 151,27	+ 7334
1879 II...	+ 60,82	71,79	+ 27,11	+ 9,64		+ 108,54	+ 169,36	+ 8211
1879 IV...	— 24,88	81,32	— 12,63	+ 4,80		+ 73,49	+ 48,61	+ 2357
1879 V...	— 100,87	75,42	— 5,84	+ 18,49		+ 88,07	— 12,80	— 621
1880 II...	+ 121,42	133,47	+ 39,87	+ 20,58	— 3,80	+ 190,12	+ 311,54	+ 15104
1880 III...	+ 9,68	29,03	+ 5,32	+ 9,67		+ 44,02	+ 53,70	+ 2603
1881 IV...	— 41,58	50,97	— 9,74	+ 13,25		+ 54,48	+ 12,90	+ 625
1881 VI...	— 10,37	33,35	— 12,19	— 3,40		+ 17,76	+ 7,39	+ 358
1882 I...	— 5,09	4,78	— 1,21	+ 1,50		+ 5,07	— 0,02	— 1
1882 III...	+ 33,96	75,67	— 15,48	— 1,23		+ 58,96	+ 92,92	+ 4505
1883 I...	— 49,09	60,99	+ 4,12	+ 18,00		+ 83,11	+ 34,02	+ 1649
1883 II...	— 24,13	24,33	+ 0,16	+ 13,85		+ 38,34	+ 14,21	+ 689
1885 II...	+ 204,21	148,62	— 9,80	+ 0,23	— 7,77	+ 131,28	+ 335,49	+ 16265
1885 V...	+ 96,73	71,20	— 33,05	— 0,59	— 7,51	+ 30,05	+ 126,78	+ 6146
1886 I...	— 5,54	49,48	+ 7,23	+ 15,98		+ 72,69	+ 67,15	+ 3255
1886 II...	+ 15,80	35,46	+ 9,47	+ 4,05		+ 48,98	+ 64,78	+ 3141
1886 III...	+ 31,77	59,70	+ 2,92	+ 2,26		+ 64,88	+ 96,65	+ 4686
1886 VIII...	+ 76,82	116,48	— 3,24	+ 3,77	— 12,76	+ 104,25	+ 181,07	+ 8778
1886 IX...	+ 25,78	46,83	+ 8,60	+ 1,07		+ 56,50	+ 82,28	+ 3989
1887 III...	— 20,21	69,13	— 24,28	+ 27,77	+ 11,81	+ 84,43	+ 64,22	+ 3113
1888 III...	— 56,38	62,78	+ 1,98	+ 2,98		+ 67,74	+ 11,36	+ 551
1889 I...	+ 97,60	114,16	+ 39,92	+ 14,47	— 3,60	+ 164,95	+ 262,55	+ 12729
1889 II...	+ 163,27	120,30	+ 169,50	— 0,04	+ 2,38	+ 292,14	+ 455,41	+ 22079
1890 I...	— 28,50	20,32	— 1,40	+ 6,14		+ 25,06	— 3,44	— 167
1890 II...	— 25,49	166,71	— 77,57	+ 14,31	— 14,83	+ 88,62	+ 63,13	+ 3061
1890 III...	+ 12,13	55,10	— 15,51	— 0,31		+ 39,28	+ 51,41	+ 2492
1890 VI...	— 115,39	121,65	+ 0,02	+ 51,34	— 12,31	+ 160,70	+ 45,31	+ 2197
1891 I...	+ 3,13	33,17	+ 1,78	+ 16,04		+ 50,99	+ 54,12	+ 2624
1891 IV...	+ 56,41	73,79	— 22,55	— 0,22		+ 51,02	+ 107,43	+ 5208
1892 I...	— 139,36	76,87	— 1,09	+ 27,67	— 0,31	+ 103,14	— 36,22	— 1756
1892 II...	+ 156,66	158,59	+ 70,76	+ 18,99	+ 0,87	+ 249,21	+ 405,87	+ 19677
1892 VI...	+ 97,59	69,08	— 68,27	— 0,68		+ 0,13	+ 97,72	+ 4738
1893 I...	— 2,19	97,18	+ 9,80	+ 29,87	+ 3,29	+ 140,14	+ 137,95	+ 6688
1893 II...	— 11,54	+ 47,06	— 35,87	— 5,56		+ 5,63	— 5,91=	— 287.10 ⁻⁷

Astre.	(Terme indépendant de ρ). $\Delta_1(e)$.	Termes dépendant de ρ .					$\Delta(e) = \Delta_1(e) + \Delta_2(e)$.	
		$\frac{pm_1}{\rho_0}$	N_1 .	N_2 .	N_3 .	$\Delta_2(e)$.	En arc.	En longueur.
1895 III...	+ 90,96	+ 65,39	— 0,21	+ 21,57		+ 86,75	— 4,21 = —	204.10 ⁻⁷
1895 IV...	— 11,76	14,45	— 2,42	+ 4,04		+ 16,07	+ 4,31	+ 209
1896 I....	+ 30,25	43,86	+ 11,25	+ 7,03		+ 62,14	+ 92,39	+ 4479
1896 III...	+ 43,65	45,02	+ 15,01	+ 6,49		+ 66,52	+ 110,17	+ 5341
1896 IV...	+ 34,75	98,71	— 1,65	+ 3,24	— 8,35	+ 91,95	+ 126,70	+ 6143
1897 I....	+ 86,65	66,36	+ 149,42	— 1,10	+ 3,82	+ 218,50	+ 305,15	+ 14794
1897 III...	— 90,50	92,34	— 48,71	+ 7,70	+ 1,36	+ 52,69	— 37,81	— 1833
1898 V...	— 8,93	120,01	— 8,04	+ 55,40	+ 5,55	+ 189,00	+ 180,07	+ 8730
1898 VI...	— 56,49	43,54	— 2,99	+ 7,43		+ 47,98	— 8,51	— 409
1898 VII...	+ 102,42	120,59	— 32,16	— 1,43	— 23,62	+ 63,38	+ 165,80	+ 8038
1898 VIII.	— 305,62	144,56	+ 4,61	+ 93,18	+ 9,07	+ 251,42	— 54,20	— 2628
1898 IX...	— 11,39	32,88	+ 3,99	+ 20,97		+ 57,84	+ 46,45	+ 2252
1898 X...	+ 54,51	51,17	+ 35,81	+ 1,52		+ 88,50	+ 143,01	+ 6933
1899 I....	+ 24,94	22,38	+ 12,39	— 0,39		+ 34,38	+ 59,32	+ 2876
1899 V...	+ 120,57	158,06	+ 9,14	+ 11,37	— 11,85	+ 166,72	+ 287,29	+ 13928
1900 I....	+ 82,41	82,60	— 10,50	+ 2,23	+ 2,01	+ 76,34	+ 158,75	+ 7696
1900 II...	+ 105,44	75,62	+ 13,92	+ 1,53	— 2,26	+ 88,81	+ 194,25	+ 9417
1901 I....	— 13,91	19,29	+ 0,41	+ 10,34		+ 30,04	+ 16,13	+ 782
1902 III...	— 34,39	32,24	— 4,97	+ 14,48		+ 41,75	+ 7,36	+ 357
1903 I....	+ 22,07	30,12	— 25,83	— 0,84		+ 3,45	+ 25,52	+ 1237
1903 II...	+ 37,77	145,40	— 30,13	— 3,12	— 9,81	+ 102,34	+ 140,11	+ 6793
1903 III...	+ 45,49	42,20	+ 14,42	+ 5,56		+ 62,18	+ 107,67	+ 5220
1903 IV...	+ 34,16	+ 25,52	+ 25,30	— 0,18		+ 50,64	+ 84,80 = +	4111.10 ⁻⁷

10. — *Calcul de l'excentricité avant que chaque comète ait subi les perturbations de Jupiter.*

En appliquant les corrections précédentes, changées de signe, aux excentricités données par les calculateurs, on obtient :

Astre.	Valeur de e au moment des observations (pour $t = 0$).		$-\Delta(e)$.	Valeur de e antérieure aux perturbations.
1771	I		— 1577.10 ⁻⁷	0,999 8423
1802	I		— 3923	0,999 6077
1804	I		— 1661	0,999 8339
1806 II...	1,010	1820	— 8432	1,009 3388
1810	I		— 8922	0,999 1078
1813 I...	I		— 1192	0,999 8808
1813 II...	I		— 7823	0,999 2177
1818 II...	I		— 1897	0,999 8103
1818 III...	1,011	617	— 5607	1,011 0563

Astre.	Valeur de e au moment des observations (pour $t = 0$).	$-\Delta(e)$.	Valeur de e antérieure aux perturbations.
1819 II...	1	— 1521	0,999 8479
1821	1	— 34	0,999 9966
1822 I....	1	— 6921	0,999 3079
1823	1	— 640	0,999 9360
1824 I....	1	— 8683	0,999 1317
1824 II...	1	+ 2199	1,000 2199
1825 I....	1,000 673	— 7144	0,999 9586
1826 II...	1	— 12029	0,998 7971
1826 IV...	1	+ 1275	1,000 1275
1827 I....	1	+ 561	1,000 0561
1827 II...	1	— 5878	0,999 4122
1830 I....	1	+ 185	1,000 0185
1830 II...	1	— 595	0,999 9405
1832 II...	1	— 2710	0,999 7290
1834	1	+ 1248	1,000 1248
1835 I....	1	— 15835	0,998 4165
1840 I....	0,999 9128	— 1827	0,999 7301
1840 III...	1	— 50879	0,994 9121
1842 II...	1	— 2213	0,999 7787
1843 II...	1,000 1798	— 8361	0,999 3437
1844 II...	0,999 6083	— 4619	0,999 1464
1844 III...	1,000 3530	+ 48	1,000 3578
1845 I....	1,000 2467	— 20267	0,998 2200
1845 II...	0,999 472	— 3286	0,999 1434
1845 III...	1	— 979	0,999 9021
1846 V...	1	— 3480	0,999 6520
1846 VIII.	1	— 8409	0,999 1591
1847 I....	0,999 9096	— 138	0,999 8958
1847 II...	1	— 10738	0,998 9262
1847 III...	0,998 5879	— 12813	0,997 3066
1847 IV...	1	— 2653	0,999 7347
1847 VI...	1,000 1727	— 2179	0,999 9548
1848 I....	1	— 1304	0,999 8696
1849 I....	1	— 463	0,999 9537
1849 II...	1,000 7079	— 8777	0,999 8302
1850 I....	0,998 8519	— 10306	0,997 8213
1850 II...	1	+ 546	1,000 0546
1851 III...	0,999 915	— 5379	0,999 3771
1851 IV...	1	— 684	0,999 9316
1852 II...	1	— 4797	0,999 5203
1853 III...	1,000 2609	— 2652	0,999 9957
1853 IV...	1,001 2289	— 714	1,001 1575
1854 I....	1	— 15258	0,998 4742
1854 II...	1	— 724	0,999 9276
1854 III...	1	— 1766	0,999 8234
1855 II...	1	— 224	0,999 9776
1857 I....	1	— 11705	0,998 8295
1857 III...	1	+ 193	1,000 0193
1858 IV...	1	— 4110	0,999 5890

Astre.	Valeur de e au moment des observations (pour $t = 0$).	$-\Delta(e)$.	Valeur de e antérieure aux perturbations.
1859	1	— 303.10 ⁻⁷	0,999 9697
1860 II . . .	1	— 347	0,999 9653
1860 III . .	1	— 1557	0,999 8443
1861 III . .	1	— 4333	0,999 5667
1862 II . . .	1	— 10231	0,998 9769
1862 IV . . .	1	— 1396	0,999 8604
1863 I	0,999 9470	— 3701	0,999 5769
1863 II . . .	1	— 7199	0,999 2801
1863 III . . .	0,999 0756	— 3322	0,998 7434
1863 IV . . .	0,998 985	+ 451	0,999 0301
1863 V	1	+ 128	1,000 0128
1863 VI . . .	1,000 6499	— 5205	1,000 1294
1864 I	1	— 892	0,999 9108
1864 III . . .	1	— 3652	0,999 6348
1864 IV . . .	1	— 11826	0,998 8174
1864 V	1	— 730	0,999 9270
1865 I	1	— 107	0,999 9893
1867 III . . .	1	+ 76	1,000 0076
1868 II	1	— 287	0,999 9713
1869 II	1	— 9732	0,999 0268
1870 I	1	— 1214	0,999 8786
1870 II	1	— 2196	0,999 7804
1871 II	1	— 1427	0,999 8573
1873 V	0,999 730	— 2224	0,999 5076
1874 II	1	— 8416	0,999 1584
1874 III . . .	0,998 8202	— 10943	0,997 7259
1874 V	0,998 8309	— 3112	0,998 5197
1874 VI	1	— 4194	0,999 5806
1877 I	1	— 1529	0,999 8471
1877 II	0,998 7005	— 2516	0,998 4489
1877 III . . .	0,997 9243	+ 252	0,997 9495
1877 VI	1	— 7334	0,999 2666
1879 II	1	— 8211	0,999 1789
1879 IV	1	— 2357	0,999 7643
1879 V	1	+ 621	1,000 0621
1880 II	1	— 15104	0,998 4896
1880 III . . .	1	— 2603	0,999 7397
1881 IV	1	— 625	0,999 9375
1881 VI	1	— 358	0,999 9642
1882 I	0,999 9945	+ 1	0,999 9946
1882 III . . .	1,000 074	— 4505	0,999 6235
1883 I	0,999 0853	— 1649	0,998 9204
1883 II	1	— 689	0,999 9311
1885 II	1,002 8519	— 16265	1,001 2254
1885 V	1	— 6146	0,999 3854
1886 I	1	— 3255	0,999 6745
1886 II	1,000 2286	— 3141	0,999 9145
1886 III . . .	1	— 4686.10 ⁻⁷	0,999 5314

F.

12

Astre.	Valeur de e au moment des observations (pour $t = 0$).	$-\Delta(e)$.	Valeur de e antérieure aux perturbations.
1886 VIII.	1	-8778.10^{-7}	0,999 1222
1886 IX..	1,000 3824	-3989	0,999 9835
1887 III..	1,000 4192	-3113	1,000 1079
1888 III..	0,999 9079	-551	0,999 8528
1889 I....	1,001 0863	-12729	0,999 8134
1889 II...	0,999 5208	-22079	0,997 3129
1890 I....	1	$+167$	1,000 0167
1890 II...	1,000 410	-3061	1,000 1039
1890 III..	1	-2492	0,999 7508
1890 VI..	0,999 1542	-2197	0,998 9345
1891 I....	1	-2624	0,999 7376
1891 IV..	1	-5208	0,999 4792
1892 I....	0,998 613	$+1756$	0,998 7886
1892 II...	1,000 345	-19677	0,998 3773
1892 VI..	1	-4738	0,999 5262
1893 I....	1	-6688	0,999 3312
1893 II...	0,999 462	$+287$	0,999 4907
1895 III...	1	$+204$	1,000 0204
1895 IV...	1	-209	0,999 9791
1896 I....	1	-4479	0,999 5521
1896 III...	1,000 476	-5341	0,999 9419
1896 IV...	1	-6143	0,999 3857
1897 I....	1,000 927	-14794	0,999 4476
1897 III..	1	$+1833$	1,000 1833
1898 V...	1	-8730	0,999 1270
1898 VI...	1	$+409$	1,000 0409
1898 VII..	1,001 034	-8038	1,000 2302
1898 VIII.	1	$+2628$	1,000 2628
1898 IX..	1	-2252	0,999 7748
1898 X...	0,999 7421	-6933	0,999 0488
1899 I....	1,000 350	-2876	1,000 0624
1899 V...	1	-13928	0,998 6072
1900 I....	1	-7696	0,999 2304
1900 II...	1,000 4156	-9417	0,999 4739
1901 I....	1	-782	0,999 9218
1902 III...	1	-357	0,999 9643
1903 I....	1	-1237	0,999 8763
1903 II...	1	-6793	0,999 3207
1903 III..	1	-5220	0,999 4780
1903 IV..	1	-4111.10^{-7}	0,999 5889



TROISIÈME PARTIE.

CONCLUSIONS DES RÉSULTATS OBTENUS PAR LA MÉTHODE APPROCHÉE.

Avant de chercher à tirer quelques déductions des derniers nombres qui viennent d'être obtenus, on commencera par étudier un peu chacun des termes qui concourent à former $\Delta(e)$, en recherchant quelles conditions les éléments doivent remplir pour que cette expression atteigne une grande valeur. On comparera ensuite les conclusions ainsi déduites avec les résultats numériques de la deuxième Partie.

1. — *Résultats relatifs au terme $\Delta_1(e)$.*

On supposera, pour simplifier, qu'on a négligé l'excentricité de la planète, de sorte que le terme en question devient

$$\Delta_1(e) = a_0 A_0 + b_0 B_0 + c_0 C_0 + d_0 D_0,$$

où l'on a

$$A_0 = \cos \omega \cos z_0 + \sin \omega \sin z_0 \cos i = \cos(z_0 - \omega) \cos^2 \frac{i}{2} + \cos(z_0 + \omega) \sin^2 \frac{i}{2},$$

$$B_0 = -\sin \omega \cos z_0 + \cos \omega \sin z_0 \cos i = \sin(z_0 - \omega) \cos^2 \frac{i}{2} - \sin(z_0 + \omega) \sin^2 \frac{i}{2},$$

$$C_0 = -\cos \omega \sin z_0 + \sin \omega \cos z_0 \cos i = -\sin(z_0 - \omega) \cos^2 \frac{i}{2} + \sin(z_0 + \omega) \sin^2 \frac{i}{2},$$

$$D_0 = \sin \omega \sin z_0 + \cos \omega \cos z_0 \cos i = \cos(z_0 - \omega) \cos^2 \frac{i}{2} - \cos(z_0 + \omega) \sin^2 \frac{i}{2};$$

il en résulte

$$\begin{aligned} \Delta_1(e) = & [-(b_0 + c_0) \sin(z_0 + \omega) + (a_0 - d_0) \cos(z_0 + \omega)] \sin^2 \frac{i}{2} \\ & \times [(b_0 - c_0) \sin(z_0 - \omega) + (a_0 + d_0) \cos(z_0 - \omega)] \cos^2 \frac{i}{2}. \end{aligned}$$

En posant

$$\begin{aligned} M_0 &= -(b_0 + c_0) \sin(z_0 + \omega) + (a_0 - d_0) \cos(z_0 + \omega), \\ P_0 &= (b_0 - c_0) \sin(z_0 - \omega) + (a_0 + d_0) \cos(z_0 - \omega), \end{aligned}$$

il vient

$$\Delta_1(e) = M_0 \sin^2 \frac{i}{2} + P_0 \cos^2 \frac{i}{2}.$$

Comme M_0 et P_0 sont indépendants de i , et sont des formes linéaires en sinus et cosinus d'un même angle, on voit que pour une valeur donnée de i , $\Delta_1(e)$ atteindra son maximum (ou son minimum qui est égal et de signe contraire) quand M_0 et P_0 l'atteindront simultanément.

Or, une expression de la forme

$$\alpha \sin x + \beta \cos x$$

a, pour valeurs maxima et minima,

$$\begin{cases} +\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}, \\ -\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}. \end{cases}$$

Par conséquent, les valeurs maxima et minima de $\Delta_1(e)$, qui correspondront à une valeur de i , seront

$$\pm \left[\sqrt{(b_0 + c_0)^2 + (a_0 - d_0)^2} \sin^2 \frac{i}{2} + \sqrt{(b_0 - c_0)^2 + (a_0 + d_0)^2} \cos^2 \frac{i}{2} \right].$$

Cette dernière expression est de la forme

$$m \sin^2 \frac{i}{2} + n \cos^2 \frac{i}{2},$$

elle variera suivant les valeurs de l'inclinaison, entre m et n .

Dans le cas actuel n est bien supérieur à m , de sorte que la plus grande valeur de $\Delta_1(e)$ sera relative à $i = 0$ et sera, en valeur absolue, égale à $\sqrt{(b_0 - c_0)^2 + (a_0 + d_0)^2}$.

Voici les résultats numériques dans le cas de Jupiter :

$q.$	Résultats relatifs au maximum de $\Delta_1(e)$.		
	$z_0 + \omega.$ 0	$z_0 - \omega.$ 0	Maximum.
0,5.....	217	265	$45 \sin^2 \frac{i}{2} + 70 \cos^2 \frac{i}{2}$
1,0.....	209	275	$83 \sin^2 \frac{i}{2} + 149 \cos^2 \frac{i}{2}$
1,5.....	203	283	$119 \sin^2 \frac{i}{2} + 232 \cos^2 \frac{i}{2}$
2,0.....	198	291	$154 \sin^2 \frac{i}{2} + 315 \cos^2 \frac{i}{2}$
2,5.....	195	297	$189 \sin^2 \frac{i}{2} + 396 \cos^2 \frac{i}{2}$

Pour avoir les résultats relatifs au minimum, il suffit naturellement de changer le signe des coefficients de $\sin^2 \frac{i}{2}$ et de $\cos^2 \frac{i}{2}$, ce qui revient à modifier de π chacun des angles $(z_0 + \omega)$ et $(z_0 - \omega)$.

Examinons les nombres qui précèdent d'un peu plus près : on voit que, pour les faibles inclinaisons, le terme en $\cos^2 \frac{i}{2}$ et, par suite, l'angle $(z_0 + \omega)$ joue le rôle prépondérant.

Au voisinage de $i = 180^\circ$, c'est au contraire $(z_0 + \omega)$ qui a de l'importance.

Pour se rendre compte avec plus de certitude de ces conclusions, on a calculé la valeur de $\Delta_1(e)$ pour toutes les valeurs de i (de 10° en 10°) et pour toutes les valeurs de $(z_0 - \omega)$ et de $(z_0 + \omega)$ de 18° en 18° .

Ce Tableau, qu'on n'a pas jugé utile de donner ici à cause de son étendue, met en évidence les deux particularités que voici :

1° Si l'inclinaison est faible ou moyenne (près de 0° ou de 90°) :

$\Delta_1(e)$ atteint une très grande valeur positive si $(z_0 - \omega)$ est voisin de 270° ;

$\Delta_1(e)$ atteint une très grande valeur négative si $(z_0 - \omega)$ est voisin de 90° ;

2° Si l'inclinaison est voisine de 180° :

$\Delta_1(e)$ est très grand positif si $(z_0 + \omega)$ est voisin de 180° ;

$\Delta_1(e)$ est très grand négatif si $(z_0 + \omega)$ est voisin de 0° .

Les résultats ci-dessous, empruntés aux exemples traités, confirment bien ces conclusions.

I. — *Astres à inclinaison faible ou moyenne.*

$\Delta_1(e)$ fortement positif.				$\Delta_1(e)$ fortement négatif.			
Astre.	i .	$z_0 - \omega$.	$\Delta_1(e)$.	Astre.	i .	$z_0 - \omega$.	$\Delta_1(e)$.
1845 I..	48 ⁰	277 ⁰	+118"	1804....	56 ⁰	59 ⁰	-117"
1849 II..	67	266	+103	1818 II..	89	90	-108
1850 I..	64	264	+125	1824 II..	56	107	-114
1851 III.	39	260	+119	1826 II..	40	54	-143
1854 I..	115	246	+164	1826 IV..	25	117	-107
1877 VI.	103	248	+142	1830 I..	22	69	-122
1880 II..	124	325	+114	1860 II..	48	59	-115
1885 II..	79	260	+207	1870 II..	99	58	-147
1892 II..	91	344	+146	1890 VI..	121	54	-115
1898 VII.	69	253	+108	1892 I...	40	98	-131
1899 V..	78	307	+125	1898 VIII.	21	99	-324
1900 II..	63	275	+108				

II. — *Astres à inclinaison voisine de 180° .*

$\Delta_1(e)$ fortement positif.			
Astre.	i .	$z_0 + \omega$.	$\Delta_1(e)$.
1835 I..	170 ⁰	224 ⁹	+137"
1889 II.	165	203	+162

La valeur de $(z_0 - \omega)$ joue donc ici un grand rôle ; or

$$\begin{aligned} z_0 &= \zeta_0 - \Omega, \\ z_0 - \omega &= \zeta_0 - \pi, \end{aligned}$$

où π représente la longitude du périhélie de la comète, et où ζ_0 désigne l'anomalie moyenne de Jupiter à l'époque où la comète passe à son périhélie.

Sauf pour les inclinaisons très voisines de 180° , le terme $\Delta_1(e)$ a une valeur considérable, positive ou négative, lorsque la quantité $\zeta_0 - \pi$ est voisine de 270° ou de 90° .

2. — Remarques concernant le terme N_1 .

Ce terme est la partie du terme en $\frac{1}{\rho^3}$ relative au voisinage immédiat de l'époque t_j , pour laquelle les rayons vecteurs des deux astres deviennent égaux.

Des exemples qui ont été examinés, et dont les résultats sont contenus dans le Tableau qui suit (p. 95 et 96), il paraît possible de déduire deux remarques :

1° N_1 est considérable quand la différence des anomalies des deux astres et la latitude de la comète sont faibles à l'instant t_j ; résultat évident *a priori* puisque dans ce cas la distance mutuelle « Planète-comète » est petite.

2° Le signe de N_1 est presque toujours de signe contraire à celui qui affecte la quantité « Longitude comète — Longitude planète » pour l'époque t_j (il n'y a pas 10 exceptions sur 150).

Dans le Tableau suivant, on a divisé N_1 par q , afin de rendre plus aisée la comparaison des résultats.

Astre.	Long. ☿ — Long Z' .	Latitude comète.	$\frac{N_1}{q}$.	Astre.	Long. ☿ — Long Z' .	Latitude comète.	$\frac{N_1}{q}$.
1771.....	+ 82°	— 8°	— 23"	1819 II.....	— 178°	— 43°	+ 1"
1802.....	+ 68	— 55	— 16	1821.....	+ 70	+ 6	— 36
1804.....	— 63	— 23	+ 3	1822 I.....	— 25	— 15'	+ 109
1806 II.....	— 33	+ 34	+ 33	1823.....	+ 41	— 50	— 19
1810.....	— 71	— 11	+ 35	1824 I.....	— 34	— 11	+ 135
1813 I.....	+ 113	— 12	— 13	1824 II.....	+ 167	— 32	— 1
1813 II.....	— 107	+ 78	+ 3	1825 I.....	— 71	— 19	+ 36
1818 II.....	— 165	— 11	+ 3	1826 II.....	— 123	+ 2	+ 10
1818 III.....	— 5	— 32	+ 11	1826 IV.....	+ 138	— 22	— 5

Astre.	Long.☉- Long Z'.	Latitude comète.	$\frac{N_1}{q}$.	Astre.	Long.☉- Long Z'.	Latitude comète.	$\frac{N_1}{q}$.
1827 I.....	+ 27 ⁰	+ 6 ⁰	- 137 ["]	1863 V.....	+104 ⁰	-18 ⁰	- 13 ["]
1827 II.....	- 87	-41	+ 20	1863 VI.....	- 91	-43	- 14
1830 I.....	-163	-17	+ 3	1864 I.....	+126	-20	- 8
1830 II.....	-147	-30	+ 5	1864 III....	+ 56	+67	- 8
1832 II.....	+ 37	+44	- 20	1864 IV.....	- 28	13	+ 124
1834.....	+121	- 7	- 10	1864 V.....	+ 70	+13	- 34
1835 I.....	- 89	+10	+ 31	1865 I.....	+ 35	-61	- 11
1840 I.....	-122	-47	+ 8	1867 III....	+118	- 2	- 11
1840 III....	- 4	0	+1231	1868 II.....	+ 96	-10	- 20
1842 II.....	+175	+72	+ 1	1869 II.....	- 94	+60	+ 11
1843 II.....	-111	+ 8	+ 13	1870 I.....	+165	+54	- 15
1844 II.....	- 12	+48	+ 4	1870 II.....	+ 3	-69	- 3
1844 III....	+159	+16	- 3	1871 II.....	+152	-29	- 4
1845 I.....	- 8	-10	+ 247	1873 V.....	- 37	+58	- 11
1845 II.....	+ 89	+57	- 12	1874 II.....	- 70	-11	+ 51
1845 III....	+ 52	-45	- 26	1874 III....	- 30	+12	- 145
1846 V.....	+165	-32	- 2	1874 V.....	+ 66	-25	- 31
1846 VIII...	- 56	-27	+ 44	1874 VI.....	- 76	-53	+ 17
1847 I.....	+ 51	+48	- 22	1877 I.....	+110	-16	- 12
1847 II.....	+147	-66	- 3	1877 II.....	+137	-51	- 5
1847 III....	- 76	-14	+ 33	1877 III....	+111	-10	- 11
1847 IV.....	+ 73	-28	- 35	1877 VI.....	+ 5	+27	- 52
1847 VI.....	- 47	+74	+ 18	1879 II.....	- 87	-49	+ 30
1848 I.....	- 50	+70	+ 2	1879 IV.....	+107	-41	13
1849 I.....	+131	+77	- 2	1879 V.....	+145	+13	- 6
1849 II.....	- 5	-67	0	1880 II.....	- 94	-31	+ 22
1850 I.....	- 25	+48	+ 18	1880 III....	-109	+ 5	+ 15
1850 II.....	+131	+40	- 3	1881 IV.....	+ 98	-10	- 15
1851 III....	+ 11	-25	- 69	1881 VI.....	+ 63	-35	- 27
1851 IV.....	+ 22	+43	- 24	1882 I.....	+177	+40	- 20
1852 II.....	-144	-50	+ 5	1882 III....	+ 29	+54	- 16
1853 III....	- 87	+15	+ 24	1883 I.....	-145	-23	+ 4
1853 IV.....	-158	+51	+ 3	1883 II.....	+172	-12	+ 1
1854 I.....	- 55	+56	+ 16	1885 II.....	+ 33	+79	- 4
1854 II.....	+ 70	-52	- 17	1885 V.....	+ 31	-44	- 31
1854 III....	+122	-59	- 7	1886 I.....	-117	-12	+ 11
1855 II.....	+ 93	-20	- 20	1886 II.....	- 90	-25	+ 20
1857 I.....	- 34	-11	+ 113	1886 III....	-115	-80	+ 3
1857 III....	+ 33	-12	- 127	1886 VIII...	+ 56	-83	- 2
1858 IV.....	- 52	-41	+ 25	1886 IX....	- 20	-52	+ 13
1859.....	+122	+53	- 7	1887 III....	+ 53	-41	- 24
1860 II.....	+ 3	-47	+ 5	1888 III....	-156	-66	+ 2
1860 III....	- 48	-71	+ 7	1889 I.....	- 98	-11	+ 22
1861 III....	+176	-13	+ 3	1899 II.....	- 61	+10	+ 75
1862 II.....	- 81	- 9	+ 36	1890 I.....	+136	+37	- 5
1862 IV.....	+115	+42	- 15	1890 II.....	+ 78	-30	- 41
1863 I.....	- 59	-60	+ 13	1890 III....	+ 77	40	- 20
1863 II.....	-129	-49	+ 7	1890 VI....	+177	+41	0
1863 III....	+ 40	-84	- 2	1891 I.....	-123	+26	+ 4
1863 IV.....	+101	-38	- 11	1891 IV.....	+ 75	+39	- 23

Astre.	Long.☿ - Long Z'.	Latitude comète.	$\frac{N_1}{q}$.	Astre.	Long.☿ - Long Z'.	Latitude comète.	$\frac{N_1}{q}$.
1892 I.....	+168 ⁰	-39 ⁰	+ 1''	1898 VII....	+ 61 ⁰	+69 ⁰	- 19''
1892 II.....	- 74	+26	+ 36	1898 VIII....	-161	-21	+ 2
1892 VI.....	+ 41	+22	- 70	1898 IX....	-125	+ 6	+ 9
1893 I.....	-136	-21	+ 8	1898 X.....	- 69	- 9	+ 47
1893 II.....	+ 55	-19	- 53	1899 I.....	- 13	-51	+ 38
1895 III....	+176	+14	0	1899 V.....	- 42	-76	+ 5
1895 IV....	+107	+34	- 13	1900 I.....	- 75	-35	- 8
1896 I.....	-100	-14	+ 19	1900 II.....	- 27	-54	+ 14
1896 III....	- 77	-31	+ 27	1901 I.....	-171	+33	+ 2
1896 IV....	+ 34	-83	- 1	1902 III....	+114	+ 2	- 12
1897 I.....	- 35	0	+ 141	1903 I.....	+ 50	- 7	- 63
1897 III....	-137	-49	- 36	1903 II.....	+108	-43	- 11
1898 V.....	+151	-14	+ 5	1903 III....	- 67	+39	+ 28
1898 VI....	+131	+56	- 5	1903 IV....	- 23	-13	+ 77

3. — Étude comparative des différents termes et conclusions relatives à la valeur de $\Delta(e)$.

En premier lieu, le terme $\frac{pm_1}{\rho_0}$ est essentiellement positif. On va dès lors examiner s'il est possible que les deux autres termes importants [c'est-à-dire $\Delta_1(e)$ et N_1] atteignent simultanément une valeur considérable.

Pour cela on va supposer que N_1 ait une grande valeur et examiner ce qu'il devra en résulter pour le terme $\Delta_1(e)$; le Tableau précédent a permis de constater que N_1 est notable quand la distance mutuelle des deux astres est faible à l'époque t_j , ce qui exige que comète et planète aient sensiblement même longitude, en même temps que la comète est proche du plan de Jupiter.

Afin de voir ce qui résulte de la double hypothèse $\left\{ \begin{matrix} L_j = l_j \\ b_j = 0 \end{matrix} \right\}$ sur les conditions à l'époque $t = 0$, il sera utile de distinguer trois cas, suivant l'inclinaison de la comète.

PREMIER CAS. — *i* voisin de zéro. Alors on a sensiblement

$$u_j = l_j - \Omega,$$

de sorte que

$$L_j = l_j \quad \text{entraîne} \quad L_j = \omega + v_j + \Omega;$$

d'autre part, l'anomalie de Jupiter augmente d'environ 35° depuis t_j jusqu'à $t = 0$, la condition précédente devient

$$L_0 - 35^\circ = \omega + v_j + \Omega$$

ou, comme L_0 diffère peu de ζ_0 ,

$$z_0 - \omega = \varphi_j + 35^\circ;$$

comme φ_j est peu éloigné de (-125°) , cela équivaut à $(z_0 - \omega)$ proche de 270° ; c'est précisément la condition trouvée plus haut (p. 93) pour que $\Delta_1(e)$ ait une très grande valeur positive dans le cas de très faibles inclinaisons.

DEUXIÈME CAS. — *i* peu différent de 90° . Dans ce cas, u_j est sensiblement nul, d'où

$$\begin{aligned} V_j &= -\omega \\ l_j &= \Omega, \end{aligned}$$

ce qui conduit, en raisonnant comme dans le premier cas, à

$$\begin{cases} z_0 - \omega = 270^\circ, \\ z_0 + \omega = 180^\circ. \end{cases}$$

Ce sont les deux conditions qui caractérisent un $\Delta_1(e)$ fortement positif dans le cas d'inclinaisons moyennes (p. 93).

TROISIÈME CAS. — *i* proche de 180° . On a sensiblement

$$l_j = \Omega - u_j$$

et, par un raisonnement identique aux précédents, on en déduit

$$z_0 + \omega = 180^\circ \text{ environ,}$$

c'est-à-dire la condition se rapportant à un $\Delta_1(e)$ positif et considérable (p. 93).

En résumé, *quand les deux astres passent près l'un de l'autre, le terme $\Delta_1(e)$ atteint une forte valeur positive.*

Par conséquent, si l'on considère l'expression $\Delta_1(e) + N_1$, on voit que ses deux termes ne peuvent pas être tous deux très considérables et négatifs. Ils ne peuvent s'ajouter et être notables que si N_1 est supérieur à zéro.

Si l'on rapproche de cette constatation le fait que $\frac{\rho m_1}{\rho_0}$ est essentiellement positif, on se rend aisément compte que la perturbation générale $\Delta(e)$ se présente presque toujours sous forme positive.

Il semble donc permis de formuler les déductions suivantes :

$\Delta(e)$ est généralement positif.

Les deux cas où il peut être assez fortement négatif sont ceux que voici :

1° Celui d'une comète passant très près de Jupiter, de telle sorte qu'à

l'époque t_j sa longitude *surpasse* un peu celle de la planète. Le terme N_1 (négatif, dans ce cas, comme on l'a vu) sera assez considérable pour donner son signe au résultat général.

Ce premier cas exceptionnel ne se rencontre pas parmi les astres étudiés, et d'ailleurs la méthode approchée deviendrait alors illusoire à cause de l'incertitude du développement de $\frac{1}{\rho^3}$.

2° Celui d'une comète pour laquelle $\Delta_1(e)$ est fortement négatif et N_1 sensiblement nul ou même légèrement négatif; cette particularité s'est présentée quelquefois dans les exemples traités, mais elle ne donne lieu qu'à des $\Delta(e)$ faiblement négatifs, à cause de l'effet opposé du terme toujours positif $\frac{pm_1}{\rho_0}$.

Enfin il est évident que $\Delta(e)$ est d'autant plus considérable que q est plus grand; un cas intéressant serait donc celui d'une comète à faible distance périhélie et dont l'orbite osculatrice à la période d'observation aurait été trouvée hyperbolique; ce caractère, en effet, ne peut être dû aux perturbations qui sont alors inappréciables; un tel astre aurait une origine extra-solaire. La comète 1844 III paraît être dans ce cas, d'après l'orbite qu'en a fourni Bond et nous l'étudierons en détail (*voir* p. 111).

4. — *Examen des résultats numériques obtenus dans la deuxième Partie.*

Voici ce qui en résulte :

I. Sur 146 astres étudiés, il s'en trouve seulement 21 pour lesquels $\Delta(e)$ est négatif; mais, toutefois, il n'y a que les 6 comètes suivantes où le fait est sensible :

1824 II	pour laquelle	$\Delta(e) = -45''$
1826 IV		— 26
1834		— 26
1892 I		— 36
1897 III		— 38
1898 VIII		— 54

II. Sur 24 comètes dont les observations avaient conduit à une hyperbole, on trouve qu'avant les perturbations :

14 étaient elliptiques,
9 moins hyperboliques,
1 avait la même excentricité.

III. Sur 23 comètes elliptiques au moment de l'apparition :

18 l'étaient davantage dans le passé,
5 l'étaient légèrement moins dans le passé;

mais, ce qui est important, *aucune n'était hyperbolique.*

IV. Sur 99 paraboles, 84 seraient des ellipses transformées. Les 15 autres semblent, il est vrai, avoir une orbite antérieure légèrement hyperbolique, mais ce caractère, dans chacun de ces cas, est assez peu prononcé pour qu'il soit permis d'admettre que la quantité $(1 - e)$ est du même ordre de grandeur que l'incertitude de l'élément e fourni par les calculateurs.

Il reste à examiner les 10 comètes hyperboliques dont le caractère s'est maintenu après que l'on a débarrassé l'excentricité des perturbations, et à décider quels sont ceux de ces astres exceptionnels qui exigeraient un calcul plus exact.

Voici ce qu'on a cru pouvoir conclure :

1^o et 2^o Comètes 1806 II et 1818 III : orbites très incertaines, basées sur des observations peu précises; le caractère hyperbolique ne mérite que peu de confiance.

3^o 1844 III : l'orbite de Bond repose sur 7 lieux normaux s'étendant du 1^{er} janvier au 8 mars 1845.

D'autre part, la distance périhélie est faible ($\log q = 9,401$), de sorte que les perturbations doivent être inappréciables.

Mérite un calcul plus exact, ou plutôt une nouvelle détermination de l'orbite (').

4^o Comète 1853 IV : orbite incertaine; le caractère hyperbolique est plus que douteux.

5^o Comète 1863 VI : le calcul de Rosen, basé sur 6 mois d'observations, mérite assez de confiance. Il est intéressant d'examiner avec plus de précision l'influence des perturbations.

6^o Comète 1885 II : observée un mois seulement; l'orbite est beaucoup trop incertaine pour pouvoir constituer un argument en faveur d'une origine extra-solaire.

7^o Comète 1887 III : on trouve pour l'excentricité antérieure la valeur 1,000 108, tandis que le calculateur indique pour cet élément une incertitude

(') Voir plus loin, page 111, un Chapitre consacré à cette comète.

pouvant atteindre 0,000 427. Le caractère hyperbolique antérieur n'est donc pas établi.

8° Comète 1890 II : très importante et qui mériterait un calcul précis; mais M. Fabry, qui a entrepris ce calcul tout récemment, a montré que l'excentricité antérieure était inférieure à l'unité, si l'on prenait soin d'effectuer un calcul rigoureux, en tenant compte de l'action perturbatrice de toutes les planètes (*Comptes rendus*, t. CXXXVIII, p. 335).

9° et 10° Comètes 1898 VII et 1899 I : orbites modernes basées sur d'excellentes observations. Un calcul plus exact s'impose.

Finalement, des résultats déjà obtenus par la méthode approchée, on peut déduire :

1° *Que les perturbations ont presque toujours pour effet d'augmenter l'excentricité à mesure que les comètes approchent du périhélie;*

2° *Que la presque totalité des comètes connues possédaient primitivement une orbite elliptique;*

3° *Qu'il faut toutefois réserver la conclusion pour les quatre comètes 1844 III, 1863 VI, 1898 VII, 1899 I, avant d'avoir entrepris sur ces astres un calcul plus précis et plus complet des perturbations; c'est ce calcul qui constituera la quatrième Partie du travail actuel.*

Remarque. — Dans la Note citée plus haut, M. Fabry a attiré l'attention sur une particularité importante et qui vient renforcer nos conclusions : tous les calculs d'orbites cométaires reposent sur des éléments héliocentriques. En déterminant, avec ces données et la masse du Soleil, la vitesse de l'astre à une époque où il était fort éloigné du Soleil, on trouve une vitesse et par conséquent une excentricité plus grandes que si l'on considérait la masse totale du système solaire, autour duquel la comète gravite en réalité.



QUATRIÈME PARTIE.

RECHERCHE PARTICULIÈRE ET PLUS COMPLÈTE CONCERNANT L'EXCENTRICITÉ ANTÉRIEURE DES COMÈTES 1844 III, 1863 VI, 1898 VII ET 1899 I.

Pour ces astres exceptionnels, on a effectué, par quadratures mécaniques, le calcul des perturbations du premier ordre produites sur l'excentricité, non seulement par Jupiter, mais encore par les autres grosses planètes près desquelles ces comètes ont pu passer. Le calcul a toujours été fait au moins pour Jupiter et Saturne.

En outre, on a examiné ce que devenait l'excentricité antérieure quand on prenait comme origine des coordonnées, non plus le centre du Soleil, mais le centre de gravité du système solaire : précaution assez importante, car, à de grandes distances du Soleil, c'est l'action de tout le système qui est à considérer.

Avant d'exposer les résultats numériques auxquels on est ainsi parvenu, on va rappeler les formules utilisées pour cette réduction au centre de gravité du système solaire et pour le calcul par quadratures.

1. — *Formules utilisées.*

1° Pour le calcul de δe par quadratures mécaniques :

On a utilisé les formules établies dès le début de la première Partie (§ 1 et 2) et que l'on transcrit à nouveau, en ajoutant quelques intermédiaires destinés à faciliter le calcul numérique.

Si l'on appelle

π la longitude du périhélie de la comète ;

Ω la longitude du nœud ascendant de la comète ;

i l'inclinaison de la comète ;

ω l'intervalle choisi pour les quadratures ;

k la constante de Gauss;

et si, pour une date donnée,

λ_1, β_1, r_1 désignent les coordonnées polaires héliocentriques d'une planète perturbatrice de masse m_1 ;

r et v l'anomalie vraie et le rayon vecteur de la comète,

on a les relations successives que voici :

$$q \sin Q = \sin \beta_1,$$

$$q \cos Q = \cos \beta_1 \sin(\lambda_1 - \Omega),$$

$$\cos B_1 \sin L_1 = q \cos(Q - i),$$

$$\cos B_1 \cos L_1 = \cos \beta_1 \cos(\lambda_1 - \Omega),$$

$$\sin B_1 = q \sin(Q - i),$$

$$u = \pi - \Omega + v,$$

$$\rho \cos \vartheta \cos \theta = \xi_1 - r = r_1 \cos B_1 \cos(L_1 - u) - r,$$

$$\rho \cos \vartheta \sin \theta = \eta_1 = r_1 \cos B_1 \sin(L_1 - u),$$

$$\rho \cos \vartheta = \zeta_1 = r_1 \sin B_1,$$

$$K = \frac{1}{\rho^3} - \frac{1}{r_1^3},$$

$$S = \frac{wk}{\sqrt{\rho}} m_1 \left(\xi_1 k - \frac{r}{\rho^3} \right),$$

$$T = \frac{wk}{\sqrt{\rho}} m_1 \eta_1 K,$$

$$\delta e = pS \sin v + T(re \sin^2 v + ap \cos v).$$

2° Pour rapporter l'excentricité de la comète au centre de gravité G du système solaire, voici les formules classiques dont on a fait usage :

Soient, pour une date donnée,

$x, y, z; x', y', z'$ les coordonnées héliocentriques de la comète et leurs dérivées par rapport au temps;

$X_i, Y_i, Z_i; X'_i, Y'_i, Z'_i$ les quantités analogues pour une planète de masse m_i ;

e l'excentricité cométaire rapportée au centre du Soleil.

En affectant d'un indice g les quantités qui se rapportent au centre de gravité en question, on est conduit à employer les formules qui suivent :

$$\sin a \sin A = \cos \Omega,$$

$$\sin a \cos A = -\sin \Omega \cos i,$$

$$\sin b \sin B = \sin \Omega,$$

$$\sin b \cos B = \cos \Omega \cos i,$$

$$x = r \sin a \sin (A + u),$$

$$y = r \sin b \sin (B + u),$$

$$z = r \sin i \sin u,$$

$$\frac{k}{\sqrt{p}} (\sin u + e \sin \omega) = c \sin U,$$

$$\frac{k}{\sqrt{p}} (\cos u + e \cos \omega) = c \cos U,$$

$$x' = c \sin a \cos (A + U),$$

$$y' = c \sin b \cos (B + U),$$

$$z' = c \sin i \cos U,$$

$$x_g = x + \sum \frac{m_i X_i}{1 + m_i},$$

$$y_g = y + \sum \frac{m_i Y_i}{1 + m_i},$$

$$z_g = z + \sum \frac{m_i Z_i}{1 + m_i},$$

$$x'_g = x' + \sum \frac{m_i X'_i}{1 + m_i},$$

$$y'_g = y' + \sum \frac{m_i Y'_i}{1 + m_i},$$

$$z'_g = z' + \sum \frac{m_i Z'_i}{1 + m_i},$$

$$k^2 \left(1 + \sum m_i \right) p_g = \sum (x_g y'_g - y_g x'_g)^2,$$

$$e_g \sin v = \frac{\sqrt{p_g}}{k r_g \sqrt{1 + \sum m_i}} (x_g x'_g + y_g y'_g + z_g z'_g),$$

$$e_g \cos v = \frac{p_g}{r_g} - 1$$

d'où l'on déduit e_g .

2. — Comète 1844 III.

L'orbite définitive admise a été calculée par Bond (*Astronomical Journal*, t. I, p. 97). Cette orbite est basée sur 7 lieux normaux et environ 120 observations s'étendant du 24 décembre 1844 au 12 mars 1845.

Bond donne $e = 1,0003530$, mais n'indique pas l'incertitude de cet élément.

On s'est d'abord assuré, comme le montrent les nombres ci-après, que la Terre et Mars n'avaient eu aucune action perturbatrice sensible sur l'excentricité.

Perturbations par la Terre et Mars.
($\omega = 20$ jours).

	$^1f.$	$f = \delta e.$
1843. Déc. 9...	— 0",02	+0",05
Déc. 29...	+ 0,04	+0,06
1844. Janv. 18...	+ 0,11	+0,07
Févr. 7...	+ 0,18	+0,07
Févr. 27...	+ 0,24	+0,06
Mars 18...	+ 0,29	+0,05
Avril 7...	+ 0,32	+0,03
Avril 27...	+ 0,32	0,00
Mai 17...	+ 0,34	—0,02
Juin 6...	+ 0,30	—0,04
Juin 26...	+ 0,24	—0,06
Juill. 16...	+ 0,18	—0,06
Août 5...	+ 0,11	—0,07
Août 25...	+ 0,04	—0,07
Sept. 14...	— 0,01	—0,05
Oct. 4...	— 0,04	—0,03
Oct. 24...	— 0,05	—0,01
Nov. 13...	— 0,02	+0,03
Déc. 3...	+ 0,02	+0,04
Déc. 23...	— 0,06	—0,08
1845. Janv. 12...	— 0,18	—0,12

Comme, d'autre part, cette comète passe très loin des planètes Uranus et Neptune, on a pu se limiter à évaluer l'action de Jupiter et de Saturne.

Voici les résultats ainsi obtenus :

Perturbations par Jupiter.

I : $\omega = 400$ jours.			II : $\omega = 80$ jours.		
	$^1f.$	$f = \delta e.$		$^1f.$	$f = \delta e.$
1830. Févr. 20...	+21 ^{''} ,67	—5 ^{''} ,28	1841. Févr. 2...	+31 ^{''} ,20	—0 ^{''} ,82
1831. Mars 27...	+16,39	—6,50	Avril 23...	+30,38	—1,00
1832. Avril 30...	+ 9,89	—5,26	Juill. 12...	+29,38	—1,19
1833. Juin 4...	+ 4,63	—1,46	Sept. 30...	+28,19	—1,37
1834. Juill. 9...	+ 3,17	+3,27	Déc. 19...	+26,82	—1,54
1835. Août 13...	+ 6,44	+6,74	1842. Mars 9...	+25,28	—1,71
1836. Sept. 16...	+13,18	+7,48	Mai 28...	+23,57	—1,86
1837. Oct. 21...	+20,66	+7,01	Août 16...	+21,71	—2,00
1838. Nov. 25...	+27,67	+4,31	Nov. 4...	+19,71	—2,10
1839. Déc. 30...	+31,98	+0,47	1843. Janv. 23...	+17,61	—2,20
1841. Févr. 2...	+32,45	—4,10	Avril 13...	+15,41	—2,26
1842. Mars 9...	+28,35	—8,55	Juill. 2...	+13,15	—2,27
	+19,80		Sept. 20...	+10,88	—2,25
			Déc. 9...	+ 8,63	—2,17
			1844. Févr. 27...	+ 6,46	—2,03
			Mai 17...	+ 4,43	—1,80
			Août 5...	+ 2,63	—1,49
			Oct. 24...	+ 1,14	—1,13
			1845. Janv. 12...	+ 0,01	—1,29
				— 1,28	

Perturbations par Saturne. $w = 400$ jours.

	f .	$f = \delta e$.
1830. Févr. 20...	+ 0,18	+0,67
1831. Mars 27...	+ 0,85	+0,62
1832. Avril 30...	+ 1,47	+0,54
1833. Juin 4...	+ 2,01	+0,45
1834. Juill. 9...	+ 2,46	+0,30
1835. Août 13...	+ 2,76	+0,17
1836. Sept. 16...	+ 2,93	+0,01
1837. Oct. 21...	+ 2,94	-0,10
1838. Nov. 25...	+ 2,84	-0,22
1839. Déc. 30...	+ 2,62	-0,35
1841. Févr. 2...	+ 2,27	-0,46
1842. Mars 9...	+ 1,81	-0,56
1843. Avril 13...	+ 1,25	-0,65
1844. Mai 17...	+ 0,60	-0,65
1845. Juin 21...	- 0,05	+0,40
1846. Juill. 26...	+ 0,35	+0,45
	+ 0,80	

Si l'on ramène l'orbite héliocentrique à la date 1831 mars 27,0, on trouve que l'action de ces deux planètes a été de diminuer l'excentricité de

$$14'',31 = 0,0000694$$

depuis 1831 jusqu'en 1845, époque des observations.

On trouve donc que, le 27 mars 1831,

$$e = 1,0003530 + 0,0000694 = 1,0004224.$$

Ensuite, en rapportant l'excentricité au centre de gravité de notre système, on a obtenu

$$e_g - e = -0,0000348,$$

ce qui, en somme, donne, pour le 27 mars 1831,

$$e_g = 1,0003876.$$

Il faudrait donc admettre l'origine extra-solaire de cet astre, si l'on accepte l'orbite de Bond. Résultat que nous avait d'ailleurs laissé prévoir la petitesse de q , puisque cette particularité s'opposait à ce que les perturbations soient très considérables.

Nous pouvons déjà annoncer qu'une étude plus approfondie du calcul de Bond, étude qui constitue la dernière partie de cette recherche, nous a conduit à modifier sa conclusion relative au caractère hyperbolique de l'orbite (*voir* p. 111).

3. — Comète 1863 VI.

L'orbite définitive est due à Rosen (*Astr. Nachrichten*, t. LXVIII, p. 159); elle repose sur 7 lieux normaux et près de 200 observations s'étendant du 11 octobre 1863 au 13 avril 1864.

Rosen, en choisissant 1863 octobre 25,0 comme époque d'osculation, donne

$$e = 1,0006499,$$

avec une incertitude qu'il estime à $\pm 0,0000651$.

Voici les résultats fournis par les quadratures mécaniques :

<i>Perturbations par Jupiter.</i>						<i>Perturbations par Saturne, Uranus et Neptune.</i>					
I : $\omega = 360$ jours.			II : $\omega = 40$ jours.			$\omega = 360$ jours.					
Dates.	$^1f.$	$f = \delta e.$	Dates.	$^1f.$	$f = \delta e.$	Dates.	$^1f.$	$f = \delta e.$			
								Saturne.	Uranus.	Neptune.	Somme.
1843. Juill. 31.	- 94",17	+ 4",43	1862. Mai 3.	- 18",71	+ 1",86	1843. Juill. 31.	-22",85	+0",33	+0",03	+0",01	+0",37
1846. Juill. 26.	- 89,74	+ 3,09	1862. Juin 12.	- 16,85	+ 1,85	1846. Juill. 26.	-22,48	+0,41	+0,03	+0,02	+0,46
1847. Juill. 21.	- 86,65	- 0,21	1862. Juill. 22.	- 15,00	+ 1,83	1847. Juill. 21.	-22,02	+0,48	+0,03	+0,02	+0,53
1848. Juill. 15.	- 86,86	- 0,68	1862. Août 31.	- 13,17	+ 1,80	1848. Juill. 15.	-21,49	+0,55	+0,03	+0,02	+0,60
1849. Juill. 10.	- 87,54	- 2,07	1862. Oct. 10.	- 11,37	+ 1,75	1849. Juill. 10.	-20,89	+0,62	+0,04	+0,02	+0,68
1850. Juill. 5.	- 89,61	- 3,13	1862. Nov. 19.	- 9,62	+ 1,70	1850. Juill. 5.	-20,21	+0,69	+0,04	+0,02	+0,75
1851. Juin 30.	- 92,74	- 3,01	1862. Déc. 29.	- 7,92	+ 1,62	1851. Juin 30.	-19,46	+0,75	+0,04	+0,02	+0,81
1852. Juin 24.	- 95,75	- 3,50	1863. Févr. 7.	- 6,30	+ 1,52	1852. Juin 24.	-18,65	+0,81	+0,05	+0,02	+0,88
1853. Juin 19.	- 99,25	- 1,31	1863. Mars 19.	- 4,78	+ 1,40	1853. Juin 19.	-17,77	+0,87	+0,05	+0,02	+0,94
1854. Juin 14.	-100,56	+ 0,78	1863. Avril 28.	- 3,38	+ 1,24	1854. Juin 14.	-16,83	+0,94	+0,06	+0,02	+1,02
1855. Juin 9.	- 99,78	+ 3,59	1863. Juin 7.	- 2,14	+ 1,02	1855. Juin 9.	-15,81	+1,01	+0,06	+0,03	+1,10
1856. Juin 3.	- 96,19	+ 6,66	1863. Juill. 17.	- 1,12	+ 0,76	1856. Juin 3.	-14,71	+1,10	+0,07	+0,03	+1,20
1857. Mai 29.	- 89,53	+ 9,31	1863. Août 26.	- 0,36	+ 0,40	1857. Mai 29.	-13,51	+1,22	+0,08	+0,03	+1,33
1858. Mai 24.	- 80,22	+10,80	1863. Oct. 5.	+ 0,04	- 0,02	1858. Mai 24.	-12,18	+1,39	+0,09	+0,03	+1,51
1859. Mai 19.	- 69,42	+12,72	1863. Nov. 14.	+ 0,02	- 0,42	1859. Mai 19.	-10,67	+1,61	+0,10	+0,03	+1,74
1860. Mai 13.	- 56,70	+14,40	1863. Déc. 24.	- 0,40	- 0,49	1860. Mai 13.	- 8,93	+1,90	+0,10	+0,03	+2,03
1861. Mai 8.	- 42,30	+16,17				1861. Mai 8.	- 6,90	+2,23	+0,11	+0,02	+2,36
1862. Mai 3.	- 26,13	+16,74				1862. Mai 3.	- 4,54	+2,47	+0,08	+0,02	+2,57
	- 9,39					1863. Avril 28.	- 1,97	+2,11	-0,01	+0,01	+2,11
						1864. Avril 22.	+ 0,14	-1,35	+0,06	-0,01	-1,30
							- 1,16				

Il en résulte que, si l'on ramène l'orbite héliocentrique à la date 1846 juillet 26,0, on trouve que l'action des planètes a eu pour effet d'augmenter l'excentricité de $110'',26 = 0,0005346$, depuis 1846 jusqu'à 1863.

On obtient donc, pour le 26 juillet 1846,

$$e = 1,0006499 - 0,0005346 = 1,0001153.$$

L'hyperbole était ainsi beaucoup moins prononcée en 1846.

En rapportant ensuite l'excentricité au centre de gravité du système solaire, on a obtenu

$$e_g = e - 0,0000977,$$

ce qui donne, le 26 juillet 1846,

$$e_g = 1,0000176.$$

L'écart avec l'unité est devenu insensible et n'atteint que le quart de l'incertitude 0,0000651 que Rosen donne pour son élément e .

Donc : *La comète 1863 VI ne peut pas être considérée comme un argument en faveur de l'origine extra-solaire de quelques comètes.*

4. — Comète 1898 VII.

L'orbite définitive a été déduite par M. Merfield (*Astr. Nach.*, t. CLIV, p. 229) de 16 lieux normaux se rapportant à plus de 350 observations qui s'étendent du 11 juin au 6 décembre 1898. L'auteur, en choisissant 1898 juin 21,0 comme époque d'osculution, donne

$$e = 1,0010336.$$

Les quadratures mécaniques ont donné :

Perturbations par Jupiter.

Perturbations par Saturne, Uranus et Neptune.

I : $\omega = 400$ jours.

II : $\omega = 80$ jours.

I : $\omega = 800$ jours.

Dates.	$^1f.$	$f = \delta e.$	Dates.	$^1f.$	$f = \delta e.$
1870. Févr. 10.	-195,67	+11,89	1894. Mars 16.	-167,03	+ 4,39
1871. Mars 17.	-183,78	+19,52	1894. Juin 4.	-162,64	+ 5,07
1872. Avril 20.	-164,26	+19,64	1894. Août 23.	-157,57	+ 5,72
1873. Mai 25.	-144,62	+14,59	1894. Nov. 11.	-151,85	+ 6,33
1874. Juin 29.	-130,03	+ 6,38	1895. Janv. 30.	-145,52	+ 6,90
1875. Août 3.	-123,65	- 3,22	1895. Avril 20.	-138,62	+ 7,43
1876. Sept. 6.	-126,87	-12,60	1895. Juill. 19.	-131,19	+ 7,93
1877. Oct. 11.	-139,47	-19,46	1895. Sept. 27.	-123,26	+ 8,41
1878. Nov. 15.	-158,93	-20,53	1895. Déc. 16.	-114,85	+ 8,88
1879. Déc. 20.	-179,46	-13,18	1896. Mars 5.	-105,97	+ 9,35
1881. Janv. 23.	-192,64	+ 0,98	1896. Mai 24.	- 96,62	+ 9,84
1882. Févr. 27.	-191,66	+15,22	1896. Août 12.	- 86,78	+10,35
1883. Avril 3.	-176,44	+23,19	1896. Oct. 31.	- 76,43	+10,88
1884. Mai 7.	-153,25	+23,62	1897. Janv. 19.	- 65,55	+11,41
1885. Juin 11.	-129,63	+18,15	1897. Avril 9.	- 54,14	+11,88
1886. Juill. 16.	-111,48	+ 9,06	1897. Juin 28.	- 42,26	+12,10
1887. Août 20.	-102,42	- 1,94	1897. Sept. 16.	- 30,16	+11,71
1888. Sept. 23.	-104,36	-13,09	1897. Déc. 5.	- 18,45	+ 9,98
1889. Oct. 28.	-117,45	-21,58	1898. Févr. 23.	- 8,47	+ 6,58
1890. Déc. 2.	-139,03	-23,31	1898. Mai 14.	- 1,89	+ 1,98
1892. Janv. 6.	-162,34	-14,78	1898. Août 2.	+ 0,09	- 0,04
1893. Févr. 9.	-177,12	+ 2,72	1898. Oct. 21.	+ 0,05	+ 3,05
1894. Mars 16.	-174,40	+21,95		+ 3,10	
	-152,45				

Dates.	$^1f.$	$f = \delta e.$			
		Saturne.	Uranus.	Neptune.	Somme.
1872. Avril 20.	-43,67	-2,85	+0,20	+0,02	-2,63
1874. Juin 29.	-46,30	-2,87	+0,21	+0,02	-2,64
1876. Sept. 6.	-48,94	-2,34	+0,21	+0,03	-2,10
1878. Nov. 15.	-51,04	-1,17	+0,21	+0,03	-0,93
1881. Janv. 23.	-51,97	+0,70	+0,21	+0,03	+0,94
1883. Avril 3.	-51,03	+2,92	+0,21	+0,03	+3,16
1885. Juin 11.	-47,87	+4,96	+0,21	-0,03	+5,20
1887. Août 20.	-42,67	+6,23	+0,21	+0,04	+6,48
1889. Oct. 28.	-36,19	+6,67	+0,22	+0,04	+6,93
1892. Janv. 6.	-29,26	+6,91	+0,25	+0,04	+7,20
1894. Mars 16.	-22,06	+8,23	+0,30	+0,06	+8,59
	-13,47				
II : $\omega = 240$ jours.					
1894. Mars 16.	-19,31	+2,47	+0,09	+0,02	-2,58
1894. Nov. 11.	-16,73	+2,78	+0,09	+0,02	+2,89
1895. Juill. 9.	-13,84	+3,21	+0,09	+0,02	+3,32
1896. Mars 5.	-10,52	+3,74	+0,09	+0,02	+3,85
1896. Oct. 31.	- 6,67	+4,16	+0,08	+0,02	+4,26
1897. Juin 28.	- 2,41	+3,44	+0,05	+0,01	+3,50
1898. Févr. 23.	+ 1,09	-1,07	-0,02	0,00	-1,09
1898. Oct. 21.	0,00	-1,19	-0,03	-0,01	-1,23
1899. Juin 18.	- 1,23	+2,44	-0,07	+0,02	+2,39
	+ 1,16				

Si l'on ramène alors à la date 1873 mai 25, 0, on trouve que les planètes, par leur action perturbatrice, ont augmenté l'excentricité de

$$183'', 05 = 0,0008875,$$

depuis cette époque jusqu'à la date d'osculation 1898 juin 21.

Par conséquent, l'excentricité était le 25 mai 1873 :

$$1,0010340 - 0,0008875 = 1,0001465.$$

On constate que le caractère hyperbolique se trouve considérablement diminué.

Enfin, en rapportant l'excentricité de l'orbite au centre de gravité du système solaire, on obtient

$$e_g - e = -0,0000572,$$

ce qui, en résumé, conduit à

$$e_g = 1,0000893,$$

pour le 25 mai 1873.

L'écart avec l'unité n'est donc plus que de $18''$, et par conséquent de l'ordre d'incertitude de l'élément e , d'autant plus qu'en remontant encore plus loin que 1873 on gagnerait sans nul doute le petit écart qui subsiste encore avec l'unité.

On voit d'ailleurs qu'en tenant compte des perturbations on a réduit $(1 - e)$ de 10336 unités du septième ordre à 893 unités, c'est-à-dire à la 12^e partie.

La comète 1898 VII ne peut donc être invoquée comme un argument s'opposant à ce que toutes les comètes appartiennent à notre système.

5. — Comète 1899 I.

L'orbite définitive, comme celle de la comète 1898 VII, est due à M. Merfield (*Astr. Nach.*, t. CLVII, p. 33). Elle repose sur 17 lieux normaux, basés sur plus de 500 observations s'étendant du 4 mars 1899 au 10 août de la même année.

En prenant 1899 mars 12 comme époque d'osculation, M. Merfield obtient

$$e = 1,0003503.$$

On a vérifié qu'il était seulement utile de calculer les perturbations produites par Jupiter, Saturne et Uranus; on donne ci-après les résultats de ces calculs.

*Perturbations par Jupiter.*I : $\omega = 400$ jours.II : $\omega = 80$ jours.

Dates.	$\frac{1}{f}$.	$f = \delta e$.	Dates.	$\frac{1}{f}$.	$f = \delta e$.
1872. Avril 20.	- 59",52	+ 2",16	1895. Avril 20.	- 63",61	+ 0",38
1873. Mai 25.	- 57,36	+ 4,86	1895. Juill. 9.	- 63,23	+ 0,73
1874. Juin 29.	- 52,50	+ 6,13	1895. Sept. 27.	- 62,50	+ 1,11
1875. Août 3.	- 46,37	+ 5,89	1895. Déc. 16.	- 61,39	+ 1,51
1876. Sept. 6.	- 40,48	+ 4,07	1896. Mars 5.	- 59,88	+ 1,94
1877. Oct. 11.	- 36,41	+ 0,73	1896. Mai 24.	- 57,94	+ 2,42
1878. Nov. 15.	- 35,68	- 3,54	1896. Août 12.	- 55,52	+ 3,00
1879. Déc. 20.	- 39,22	- 7,10	1896. Oct. 31.	- 52,52	+ 3,72
1881. Janv. 23.	- 46,32	- 7,89	1897. Janv. 19.	- 48,80	+ 4,70
1882. Févr. 27.	- 54,21	- 5,33	1897. Avril 9.	- 44,10	+ 6,15
1883. Avril 3.	- 59,54	- 2,02	1897. Juin 28.	- 37,95	+ 8,32
1884. Mai 7.	- 61,56	+ 3,50	1897. Sept. 16.	- 29,63	+ 11,18
1885. Juin 11.	- 58,06	+ 6,57	1897. Déc. 5.	- 18,45	+ 12,21
1886. Juill. 16.	- 51,49	+ 7,93	1898. Févr. 23.	- 6,24	+ 6,72
1887. Août 20.	- 43,56	+ 7,37	1898. Mai 14.	+ 0,48	+ 0,50
1888. Sept. 23.	- 36,19	+ 4,74	1898. Août 2.	+ 0,98	- 1,03
1889. Oct. 28.	- 31,45	+ 0,07	1898. Oct. 21.	- 0,05	- 0,48
1890. Déc. 2.	- 31,38	- 5,66	1899. Janv. 9.	- 0,53	
1892. Janv. 6.	- 37,04	- 10,12	1899. Mars 30.	- 0,02	
1893. Févr. 9.	- 47,16	- 10,64	1899. Juin 18.	+ 1,17	+ 0,51
1894. Mars 16.	- 57,80	- 5,85		+ 4,95	+ 1,19
1895. Avril 20.	- 63,65	+ 1,90			+ 3,78
	- 61,75				

*Perturbations par Saturne et Uranus.*I : $\omega = 800$ jours. $f = \delta e$.

Dates.	$\frac{1}{f}$.	Saturne.	Uranus.	Somme.
1872. Avril 20.	- 9",19	0",00	+ 0",02	=+ 0",02
1874. Juin 29.	- 9,17	- 0,45	+ 0,03	- 0,42
1876. Sept. 6.	- 9,59	- 0,88	+ 0,04	- 0,84
1878. Nov. 15.	- 10,43	- 1,20	+ 0,06	- 1,14
1881. Janv. 23.	- 11,57	- 1,28	+ 0,08	- 1,20
1883. Avril 3.	- 12,77	- 0,99	+ 0,10	- 0,89
	- 13,66			
II : $\omega = 400$ jours.				
1883. Avril 3.	- 13",02	- 0",50	+ 0",05	=- 0",45
1884. Mai 7.	- 13,47	- 0,35	+ 0,06	- 0,29
1885. Juin 11.	- 13,76	- 0,16	+ 0,07	- 0,09
1886. Juill. 16.	- 13,85	+ 0,07	+ 0,09	+ 0,16
1887. Août 20.	- 13,69	+ 0,31	+ 0,11	+ 0,42
1888. Sept. 23.	- 13,27	+ 0,56	+ 0,12	+ 0,68
1889. Oct. 28.	- 12,59	+ 0,81	+ 0,11	+ 0,92
1890. Déc. 2.	- 11,67	+ 1,08	+ 0,10	+ 1,18
1892. Janv. 6.	- 10,49	+ 1,40	+ 0,08	+ 1,48
1893. Févr. 9.	- 9,01	+ 1,78	+ 0,05	+ 1,83
1894. Mars 16.	- 7,18	+ 2,05	+ 0,04	+ 2,09
1895. Avril 20.	- 5,09	+ 1,86	+ 0,03	+ 1,89
1896. Mai 24.	- 3,20	+ 1,43	+ 0,02	+ 1,45
1897. Juin 28.	- 1,75	+ 1,08	+ 0,02	+ 1,10
1898. Août 2.	- 0,65	+ 0,62	+ 0,04	+ 0,66
1899. Sept. 6.	+ 0,01	+ 0,36	+ 0,02	+ 0,38
	+ 0,39			

En réduisant à l'époque 1873 mai 25,0, on trouve que les perturbations de e , depuis 1873 qu'en 1899, ont augmenté cet élément de

$$64'',29 = 0,0003117,$$

ce qui donne déjà, pour 1873 mai 25,

$$e = 1,0003503 - 0,0003117 = 1,0000386.$$

Si l'on rapporte ensuite au centre de gravité du système solaire on obtient

$$e_g = e - 0,0000114,$$

de sorte que, finalement, on a, le 25 mai 1873,

$$e_g = 1,0000272.$$

L'écart avec l'unité est donc à peine de l'ordre de grandeur de l'incertitude de l'élément e lui-même; il disparaîtrait certainement si l'on remontait encore plus dans le passé.

CONCLUSIONS.

Il a paru légitime, d'après les derniers résultats obtenus, de conclure que, parmi tous les astres examinés, un seul, la comète 1844 III, semble désormais militer en faveur de la possibilité d'une origine extra-solaire.

Dans une dernière Partie, on va montrer, par un examen critique de l'orbite hyperbolique admise jusqu'ici comme la meilleure, que ce résultat est erroné et que l'ensemble des observations exige au contraire une orbite plutôt elliptique.

CINQUIÈME PARTIE.

SUR L'ORBITE DE LA COMÈTE 1844 III.

Découverte au Cap de Bonne-Espérance le 18 décembre 1844, cette comète devint rapidement visible à l'œil nu et le resta jusqu'à la fin de janvier 1845. Les observations au télescope purent être continuées jusqu'au 12 mars.

Pendant la plus grande partie de son apparition cet astre ne fut observable que dans l'hémisphère austral, et la majeure partie des mesures furent faites à l'observatoire du Cap. On ne possède qu'une vingtaine d'observations européennes effectuées toutes après le début de février.

L'orbite que nous avons utilisée est due à Bond (*The astronomical Journal*, t. I, p. 97), c'est celle admise jusqu'à ce jour comme la meilleure et elle est basée sur 138 observations réparties du 24 décembre 1844 au 12 mars suivant.

Cet astronome, au lieu de procéder comme on le fait actuellement, en prenant comme inconnues les variations des éléments de l'orbite, employa la méthode que voici : il partit d'un système de valeurs pour les coordonnées x, y, z et les vitesses $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$ de la comète au 1^{er} janvier 1845, puis il chercha quelles corrections il convenait d'attribuer à ces six quantités pour que les lieux normaux fussent représentés de la manière la plus favorable. Il fut conduit à l'hyperbole dont nous avons fait usage.

Cette façon de procéder, correcte au point de vue théorique, présentait pour nous un grave inconvénient : elle ne nous permettait pas d'estimer immédiatement, comme nous le désirions, quel était le degré d'incertitude de l'élément e .

On a donc jugé indispensable de reprendre le calcul par la méthode actuelle ; c'était d'ailleurs une occasion de vérifier les conclusions de Bond. Voici la marche et le résumé des résultats obtenus :

Prenant, comme Bond, les éléments paraboliques provisoires suivants (rapportés au préalable à l'équateur)

T = 1844 déc. 13,68294, t. moyen de Greenwich.

Ω	93. 1'.20",35	} Équinoxe et équateur moyens 1845,0;
π	304.26.36,88	
i	39. 0.53,38	
$\log q$	9,4001230	

mais, changeant très légèrement les dates de quelques lieux normaux, on trouva que cette parabole laissait les écarts suivants :

Dates.		Écarts dans le sens (Obs. — Calc.).	
T. m. de Greenwich.		$\cos \delta \, d\alpha$.	$d\delta$.
1844 Déc.	31,0.....	— 6",3	+47",3
1845 Janv.	14,0.....	— 3,3	+43,2
	25,0.....	— 12,5	+34,7
Févr.	5,0.....	— 20,4	+21,4
	23,0.....	— 13,5	+ 3,6
1845 Mars	8,0.....	— 18,4	— 2,9

Il s'agissait de déterminer quelles corrections il convenait d'apporter aux éléments paraboliques pour diminuer ces écarts de la façon la plus avantageuse.

On a, dans ce but, fait usage de la méthode d'Oppolzer (*Lehrbuch zur Bahnbestimmung der Kometen und Planeten*, t. II, p. 405), dont nous rappelons successivement les résultats.

Si l'on considère un astre dont les éléments *équatoriaux* sont ω , Ω , i et dont l'ascension droite et la déclinaison sont égales à α , δ , pour une date donnée t , on posera tout d'abord

$$\begin{aligned} A \sin A' &= \cos(\alpha - \Omega) \cos i, \\ A \cos A' &= \sin(\alpha - \Omega), \\ m \sin M &= \sin i, \\ m \cos M &= -\sin(\alpha - \Omega) \cos i, \\ B \sin B' &= m \sin(M + \delta), \\ B \cos B' &= \cos(\alpha - \Omega) \sin \delta, \\ u &= v + \omega, \\ \theta &= \frac{1-e}{1+e} \tan^2 \frac{v}{2}, \end{aligned}$$

puis, à l'aide de l'argument θ , on trouve dans l'Ouvrage cité plus haut une Table (Table XVI, p. 608) qui donne les valeurs correspondantes de certains coefficients E_2^v , E_4^v , E_0^r , E_4^r qui entrent dans les formules suivantes.

On calcule ensuite les quantités auxiliaires F, G, H, F', G', H', à l'aide des relations

$$F \sin F' = \frac{ke \sin v}{r \sqrt{p}}, \quad (\log k = 8,235587),$$

$$F \cos F' = \frac{-k \sqrt{p}}{r_2},$$

$$G \sin G' = -\frac{\sin^2 v}{4(1+e)} \left(E_0' + \tan^2 \frac{v}{2} + E_4' \tan^4 \frac{v}{2} \right),$$

$$G \cos G' = \frac{\sin v \cos^2 \frac{v}{2}}{2(1+e)} \left(1 + E_2' \tan^2 \frac{v}{2} + E_4' \tan^4 \frac{v}{2} \right),$$

$$H \sin H' = (0,362216_n) \left[\frac{q}{r} \cos v - (1-e) G \sin G' \right],$$

$$H \cos H' = (8,773889_n) \frac{t-T}{r^2} \sqrt{p},$$

et les coefficients différentiels prennent la forme

$$\frac{\cos \delta \partial \alpha}{\partial T} = \frac{r}{\rho} AF \sin(A' + F' + u),$$

$$\frac{\cos \delta \partial \alpha}{\partial e} = \frac{r}{\rho} AG \sin(A' + G' + u),$$

$$\frac{\cos \delta \partial \alpha}{\partial \log q} = \frac{r}{\rho} AH \sin(A' + H' + u),$$

$$\frac{\cos \delta \partial \alpha}{\partial \pi} = \frac{r}{\rho} A \sin(A' + u),$$

$$\frac{\cos \delta \partial \alpha}{\sin i \partial \Omega} = \frac{r}{\rho} \tan^2 \frac{i}{2} \cos(\alpha - \Omega + u),$$

$$\frac{\cos \delta \partial \alpha}{\partial i} = -\frac{r}{\rho} \sin u \cos(\alpha - \Omega) \sin i,$$

$$\frac{\partial \delta}{\partial T} = \frac{r}{\rho} BF \sin(B' + F' + u),$$

$$\frac{\partial \delta}{\partial e} = \frac{r}{\rho} BG \sin(B' + G' + u),$$

$$\frac{\partial \delta}{\partial \log q} = \frac{r}{\rho} BH \sin(B' + H' + u),$$

$$\frac{\partial \delta}{\partial \pi} = \frac{r}{\rho} B \sin(B' + u),$$

$$\frac{\partial \delta}{\sin i \partial \Omega} = -\frac{r}{\rho} \left[\sin(\alpha - \Omega + u) \sin \delta \tan^2 \frac{i}{2} + \cos u \cos \delta \right],$$

$$\frac{\partial \delta}{\partial i} = \frac{r}{\rho} [\sin(\alpha - \Omega) \sin \delta \sin i + \cos \delta \cos i] \sin u.$$

En appliquant cette méthode à l'exemple qui nous occupe, nous avons obtenu les équations différentielles que voici (où les coefficients désignent des logarithmes) :

F.

1° Équations en $\cos \delta d\alpha$.

$$\begin{array}{rclclclcl}
 8,39385n dT + 9,42947n d(\log q) + 8,96344 d\pi + 9,32709n \sin i d\Omega + 9,33514n di + 9,34405 de & = & - & 6'',3, \\
 8,40909n & 9,95916n & 9,62765 & 9,29880n & 8,48199n & 9,47508 & = & - & 3,3, \\
 8,29362n & 0,02641n & 9,78437 & 8,69859n & 8,88223 & 9,28894 & = & - & 12,5, \\
 8,15012n & 0,00658n & 9,82907 & 8,84064 & 9,04215 & 8,88126 & = & - & 20,4, \\
 7,92639n & 9,93221n & 9,83237 & 9,24512 & 9,02061 & 8,87497n & = & - & 13,5, \\
 7,78260n & 9,87727n & 9,82134 & 9,33061 & 8,95149 & 9,20500n & = & - & 18,4.
 \end{array}$$

(1)

2° Équations en $d\delta$.

$$\begin{array}{rclclclcl}
 8,22793 dT + 9,65907 d(\log q) & 9,30001n d\pi + 9,41412n \sin i d\Omega + 9,59937n di + 8,85584n de & = & + & 47'',3, \\
 7,22893 & 9,06449 & 8,82753n & 9,87508n & 9,68553n & 8,07566 & = & + & 43,2, \\
 7,52300n & 9,42825n & 9,24271 & 9,98378n & 9,61635n & 8,53363n & = & + & 34,7, \\
 7,58307n & 9,66608n & 9,54895 & 0,00696n & 9,50399n & 9,19892n & = & + & 21,4, \\
 7,41922n & 9,72609n & 9,68722 & 9,99053n & 9,30662n & 9,54460n & = & + & 3,6, \\
 7,26636n & 9,71030n & 9,71343 & 9,96706n & 9,17030n & 9,65424n & = & - & 2,9.
 \end{array}$$

Posant alors, pour faciliter le calcul :

$$\begin{array}{l}
 (2) \quad \left\{ \begin{array}{l}
 X = [9,83237] d\pi, \\
 Y = [8,40909] dT, \\
 Z = [0,02641] d(\log q), \\
 W = [0,00696] \sin i d\Omega, \\
 U = [9,68553] di, \\
 E = [9,65424] de,
 \end{array} \right.
 \end{array}$$

et, groupant les 12 équations ci-dessus par la méthode des moindres carrés, on a obtenu les équations normales suivantes :

$$\begin{array}{l}
 + 5,66891 X - 1,74778 W - 2,98633 Y - 0,09085 U - 5,06343 Z - 0,95444 E = - 63'',5024, \\
 - 1,74778 + 4,43143 + 0,51054 + 3,28484 + 1,32353 + 1,75853 = - 104,1114, \\
 - 2,98633 + 0,51054 + 3,48075 - 0,19962 + 3,30007 - 1,30880 = + 65,1479, \\
 - 0,09085 + 3,28484 - 0,19962 + 3,46131 - 0,11505 + 0,77414 = - 136,1864, \\
 - 5,06343 + 1,32353 + 3,30007 - 0,11505 + 4,79577 + 0,08135 = + 66,8564, \\
 - 0,95444 X + 1,75853 W - 1,30880 Y + 0,77414 U + 0,08135 Z + 2,80439 E = - 21,7251.
 \end{array}$$

L'élimination successive des inconnues, conduite de façon que, dans chaque équation, le coefficient maximum soit le premier, a donné (1) :

(1) Toutes les quantités entre crochets désignent des logarithmes, selon l'usage; l'unité est la seconde d'arc.

$$(3) \left\{ \begin{aligned} [0,75350]X + [0,24249_n]W + [0,47514_n]Y + [8,95833_n]U + [0,70445_n]Z + [9,97975_n]E &= [1,80279_n], \\ [0,59024] W + [9,61296_n]Y + [0,51280] U + [9,37579_n]Z + [0,16562] E &= [2,09233_n], \\ [0,27053] Y + [8,98091] U + [9,78368] Z + [0,21940_n]E &= [1,27096], \\ [9,86334] U + [8,45672_n]Z + [9,58116_n]E &= [1,54000_n], \\ [8,77414] Z + [9,19462_n]E &= [0,68617_n], \\ [7,92428] E &= [9,27490_n]. \end{aligned} \right.$$

Afin d'examiner simultanément ce que donnent la meilleure parabole et ensuite la meilleure orbite, on a d'abord résolu ces équations en laissant E provisoirement indéterminé, c'est-à-dire en utilisant seulement les cinq premières relations (3); cela a donné

$$\begin{aligned} Z &= [0,42049] E + [1,91203_n], \\ U &= [9,79618] E + [1,70499_n], \\ Y &= [7,16107_n]E + [1,59362], \\ W &= [9,86858_n]E + [0,99085], \\ X &= [0,36206] E + [1,78726_n], \end{aligned}$$

ou, en revenant aux éléments, à l'aide de (2) :

$$(4) \left\{ \begin{aligned} d(\log q) &= [0,04832] de + [1,88562_n], \\ di &= [9,76489] de + [2,01946_n], \\ dT &= [8,40622_n] de + [3,18453], \\ \sin i d\Omega &= [9,51586_n] de + [0,98389], \\ d\pi &= [0,18393] de + [1,95489_n]. \end{aligned} \right.$$

En substituant ces résultats dans les équations de condition primitives (1), on a obtenu

$$(5) \left\{ \begin{aligned} + 0,00516 de &= - 1,375, \\ - 0,02254 &+ 2,968, \\ - 0,00244 &- 0,780, \\ + 0,01348 &- 5,144, \\ + 0,01067 &+ 4,234, \\ - 0,00869 &- 0,033, \\ - 0,01337 &- 0,556, \\ + 0,00274 &- 0,006, \\ + 0,00876 &+ 1,012, \\ + 0,01207 &- 0,047, \\ + 0,00109 &- 1,177, \\ - 0,01721 de &= + 0,501. \end{aligned} \right.$$

On voit déjà que la meilleure parabole, celle qui serait obtenue en supposant $de = 0$, dans (5), laisse subsister dans les équations de condition des écarts dont la somme des carrés atteint 59.

Cela montre que la représentation est déjà très bonne et que l'on ne peut pas espérer beaucoup mieux par une modification de l'élément e .

Pour obtenir l'orbite la meilleure, il nous suffit de résoudre les équations (5). En utilisant la méthode des moindres carrés, on a obtenu ainsi

$$(6) \quad de = -55'',648 = -0,000\,2698,$$

résultat qui s'accorde bien avec notre dernière équation (3), puisqu'elle donnerait

$$e = -0,000\,2410.$$

La meilleure orbite serait donc une ellipse pour laquelle

$$e = 0,999\,7302.$$

En substituant la valeur (6) dans les équations (5), on trouve que cette ellipse laisse les résidus suivants :

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} -1'',088, \\ +1,713, \\ -0,916, \\ -4,394, \\ +4,828, \\ -0,517, \\ -1,300, \\ +0,146, \\ +1,500, \\ +0,625, \\ -1,116, \\ -0,457, \end{array} \right.$$

dont la somme des carrés atteint 54.

Le gain sur les écarts laissés par la parabole est donc très faible comme on l'avait prévu; c'est en même temps une preuve que l'excentricité est très incertaine.

Les résultats qui précèdent conduisent aux deux systèmes d'éléments que voici :

Meilleure parabole.			Ellipse.		
T	= 1844 déc. 13,69035	t. m. de Greenwich	T	= 1844 déc. 13,69036	
Ω	= $93^{\circ} 1' 35'' 66$	Équateur et équinoxe moyens 1843,0	Ω	= $93^{\circ} 2' 4'' 65$	
π	= $304.25. 6,75$		π	= $304.23.41,76$	
i	= $38.59. 8,80$		i	= $38.58.36,42$	
$\log q$	= $9,399 7504$		$\log q$	= $9,399 4489$	
			e	= $0,999 7302$	

Pour vérifier tout ce qui précède d'une façon certaine, on a calculé, avec chacun de ces systèmes, les positions de la comète pour les six lieux normaux. La comparaison avec les données de l'observation a donné les écarts suivants :

Dates. 1844-1845.	Lieux			Obs.-calcul.	
	observés.	calculés avec la parabole.	calculés avec l'ellipse.	Parabole.	Ellipse.
	Ascensions droites : 1845,0.			$\cos \delta \, d\alpha$.	
Déc. 31,0...	$315^{\circ} 22' 44'' 5$	$315^{\circ} 22' 46'' 3$	$315^{\circ} 22' 45'' 7$	— 1,3	— 0,9
Janv. 14,0...	$357.18.46,3$	$357.18.41,8$	$357.18.43,3$	+ 3,4	+ 2,2
25,0...	$19.39.52,4$	$19.39.53,0$	$19.39.53,2$	— 0,5	— 0,7
Févr. 5,0...	$33.41.21,8$	$33.41.27,2$	$33.41.26,2$	— 4,9	— 4,0
23,0...	$48. 2. 8,5$	$48. 2. 3,8$	$48. 2. 3,0$	+ 4,4	+ 5,3
Mars 8,0...	$55.21.34,9$	$55.21.34,9$	$55.21.35,5$	0,0	— 0,5
Déclinaisons : 1845,0.					
Déc. 31,0...	— $43.32.41,0$	— $43.32.40,3$	— $43.32.39,6$	— 0,7	— 1,4
Janv. 14,0...	— $41.47.30,3$	— $41.47.30,3$	— $41.47.30,5$	0,0	+ 0,2
25,0...	— $33.19.16,7$	— $33.19.17,7$	— $33.19.18,2$	+ 1,0	+ 1,5
Févr. 5,0...	— $24.45.37,6$	— $24.45.37,6$	— $24.45.38,4$	0,0	+ 0,8
23,0...	— $14. 9.40,0$	— $14. 9.39,1$	— $14. 9.39,0$	— 0,9	— 1,0
Mars 8,0...	— $8.49.10,6$	— $8.49.11,2$	— $8.49.10,2$	+ 0,6	— 0,4
Somme des carrés.....				59,5	56,1

Il y a donc parfait accord avec les Tableaux (6) et (7) qui donnent les écarts théoriques.

Il restait enfin à comparer nos résultats avec ceux de Bond. Il y a entre ses éléments et les nôtres un très grand désaccord; aussi n'a-t-on pas hésité à reprendre ses calculs afin d'en trouver la cause.

Voici ce que l'on a pu déduire d'un examen attentif de la succession de ses résultats :

En posant les équations de condition analogues à nos équations (1) (p. 114), *Bond a fait erreur de signe pour les seconds membres des six dernières équations, c'est-à-dire celles relatives à la Déclinaison*; en d'autres termes, il a calculé les coefficients différentiels relatifs à la *Déclinaison*, mais il a placé dans les seconds membres les écarts (obs.-calcul) relatifs à la *Distance polaire*.

Puis, résolvant les équations obtenues de la sorte, il s'est contenté de substituer dans les équations de condition les valeurs trouvées pour les inconnues et de vérifier que le Tableau des écarts [analogue à notre Tableau (7)] était satisfaisant. D'où l'hyperbole erronée qui nous a tant gêné dans la recherche actuelle.

Si Bond avait pris la précaution élémentaire de faire la vérification directe en calculant les positions de la comète, pour les lieux normaux, à l'aide de son hyperbole, il aurait obtenu les écarts suivants :

Dates. 1844-1845.	Lieux		Obs.-calcul.
	observés.	fournis par l'hyperbole.	
	Ascensions droites : 1845,0.		
			$\cos \delta \, d\alpha.$
Déc. 31,0...	315. ⁰ .22'.44",5	315. ⁰ .22'.50",7	— 4",5
Janv. 14,0...	357.18.46,3	357.18.36,8	+ 7,1
25,0...	19.39.52,4	19.39.51,5	+ 0,8
Févr. 5,0...	33.41.21,8	33.41.28,3	— 5,9
23,0...	48. 2. 8,5	48. 2. 5,2	+ 3,2
Mars 8,0...	55.21.34,9	55.21.34,6	+ 0,3
	Déclinaisons : 1845,0.		
			$d\delta.$
Déc. 31,0...	— 43.32.41,0	— 43.34.22,1	+ 81,1
Janv. 14,0...	— 41.47.30,3	— 41.48.54,3	+ 84,0
25,0...	— 33.19.16,7	— 33.20.22,9	+ 66,2
Févr. 5,0...	— 24.45.37,6	— 24.46.19,5	+ 41,9
23,0...	— 14. 9.40,0	— 14. 9.49,7	+ 9,7
Mars 8,0...	— 8.49.10,6	— 8.49. 7,1	— 3,5

et reconnu immédiatement l'inadvertance qui rend sans valeur la dernière partie d'un travail qui a coûté beaucoup de peine.

Nos conclusions seront donc :

1° Parmi les comètes connues, il n'en existe aucune que l'on puisse invoquer comme un argument en faveur de l'hypothèse d'une origine extra-solaire.

2° L'orbite hyperbolique admise jusqu'ici comme la meilleure concernant la comète 1844 III est inexacte. L'orbite la plus probable semble être, au contraire, légèrement elliptique. Toutefois, si l'on considère, dans le Tableau (8), le peu de gain réalisé en passant de la parabole à l'ellipse, on croit plus avisé de conclure que la parabole est bien suffisante pour représenter les observations.



TABLES NUMÉRIQUES.

TABLE I (voir p. 23). — VALEUR DE LA FONCTION $f(\alpha, \beta, i) = \cos \alpha$

Valeur de $F(\alpha - \beta)$, en dix-millièmes. — Les arguments doi

$x - p$	Signe de F.		θ																											
	+	-	0°	2°	4°	6°	8°	10°	12°	14°	16°	18°	20°	20°	21°	22°	23°	24°	25°	26°	27°	28°	29°							
			180.	180.	180.	182.	184.	186.	188.	190.	192.	194.	196.	198.	200.	200.	201.	202.	203.	204.	205.	206.	207.	208.	209.					
			360.	358.	356.	354.	352.	350.	348.	346.	344.	342.	340.	340.	339.	338.	337.	336.	335.	334.	333.	332.	331.	330.						
$i = 0^\circ$	1,0000	9994	9976	9945	9903	9848	9781	9703	9613	9511	9397	9397	9336	9272	9205	9135	9063	8988	8910	8829	8747	8663	8577							
10	9924	9918	9900	9869	9827	9773	9707	9629	9540	9438	9325	9325	9265	9201	9135	9066	8994	8920	8842	8762	8680	8597	8513							
12	9891	9885	9866	9836	9791	9730	9657	9574	9479	9372	9257	9257	9197	9131	9060	8989	8917	8844	8770	8695	8620	8545	8470							
14	9852	9846	9827	9797	9752	9702	9630	9550	9454	9347	9232	9232	9174	9104	9033	8962	8890	8817	8743	8668	8593	8518	8443							
16	9806	9800	9781	9751	9707	9657	9587	9508	9412	9305	9190	9190	9131	9060	8989	8917	8844	8770	8695	8620	8545	8470	8395							
18	9755	9749	9730	9700	9656	9607	9537	9459	9363	9256	9141	9141	9082	9013	8942	8870	8797	8723	8648	8573	8498	8423	8348							
20	9698	9692	9673	9643	9600	9551	9481	9403	9307	9200	9085	9085	9026	8957	8886	8814	8740	8665	8590	8515	8440	8365	8290							
22	9636	9630	9611	9581	9538	9489	9420	9342	9246	9139	9024	9024	8965	8896	8825	8753	8680	8607	8533	8460	8386	8312	8238							
24	9568	9562	9543	9513	9470	9421	9352	9274	9178	9071	8956	8956	8897	8828	8757	8685	8612	8539	8466	8393	8319	8245	8171							
26	9493	9487	9468	9438	9395	9346	9277	9181	9074	8967	8852	8852	8793	8724	8653	8581	8508	8435	8362	8289	8215	8141	8067							
28	9415	9409	9390	9360	9317	9268	9199	9103	9006	8899	8784	8784	8725	8656	8585	8513	8440	8367	8294	8220	8146	8072	7998							
30	9330	9324	9305	9275	9232	9183	9114	9018	8921	8814	8709	8709	8650	8581	8510	8438	8365	8292	8218	8144	8070	7996	7922							
32	9240	9235	9216	9186	9143	9094	9025	8929	8832	8725	8618	8618	8559	8490	8419	8347	8274	8201	8127	8053	7979	7905	7831							
34	9145	9140	9121	9091	9048	9000	8931	8835	8738	8631	8524	8524	8465	8396	8325	8253	8180	8107	8033	7959	7885	7811	7737							
36	9045	9040	9021	8991	8948	8900	8831	8735	8638	8531	8424	8424	8365	8296	8225	8153	8080	8007	7933	7859	7785	7711	7637							
38	8940	8935	8916	8886	8843	8794	8725	8629	8532	8425	8318	8318	8259	8190	8119	8047	7974	7901	7827	7753	7679	7605	7531							
40	8830	8825	8806	8776	8733	8684	8615	8519	8422	8315	8208	8208	8149	8080	8009	7937	7864	7791	7717	7643	7569	7495	7421							
42	8716	8710	8691	8661	8618	8569	8500	8404	8307	8200	8093	8093	8034	7965	7894	7822	7749	7676	7602	7528	7454	7380	7306							
44	8597	8592	8573	8543	8500	8451	8382	8286	8189	8082	7975	7975	7916	7847	7776	7704	7631	7557	7483	7409	7335	7261	7187							
46	8473	8468	8449	8419	8376	8327	8258	8162	8055	7948	7841	7841	7782	7713	7642	7569	7496	7422	7348	7274	7200	7126	7052							
48	8346	8341	8322	8292	8249	8199	8130	8034	7927	7820	7713	7713	7654	7585	7514	7441	7367	7293	7219	7145	7071	6997	6923							
50	8214	8209	8190	8160	8117	8068	8000	7904	7797	7690	7583	7583	7524	7455	7384	7311	7237	7163	7089	7015	6941	6867	6793							
52	8078	8074	8055	8025	7982	7933	7864	7768	7661	7554	7447	7447	7388	7319	7248	7175	7101	7027	6953	6879	6805	6731	6657							
54	7939	7934	7915	7885	7842	7793	7724	7628	7521	7414	7307	7307	7248	7179	7108	7035	6961	6887	6813	6739	6665	6591	6517							
56	7796	7791	7772	7742	7699	7650	7581	7485	7378	7271	7164	7164	7105	7036	6965	6892	6818	6744	6670	6596	6522	6448	6374							
58	7630	7625	7606	7576	7533	7484	7415	7319	7212	7105	7008	7008	6949	6880	6809	6736	6662	6588	6514	6440	6366	6292	6218							
60	7300	7296	7277	7247	7204	7155	7086	6990	6883	6776	6669	6669	6610	6541	6470	6400	6326	6252	6178	6104	6030	5956	5882							
61	7142	7138	7119	7089	7046	6997	6928	6832	6725	6618	6511	6511	6452	6383	6312	6241	6167	6093	6019	5945	5871	5797	5723							
62	7348	7343	7324	7294	7251	7202	7133	7037	6930	6823	6716	6716	6657	6588	6517	6446	6372	6298	6224	6150	6076	6002	5928							
63	7270	7266	7247	7217	7174	7125	7056	6960	6853	6746	6639	6639	6580	6511	6440	6369	6295	6221	6147	6073	6000	5926	5852							
64	7192	7188	7169	7139	7096	7047	6978	6882	6775	6668	6561	6561	6502	6433	6362	6291	6217	6143	6069	5995	5921	5847	5773							
65	7113	7109	7090	7060	7017	6968	6900	6804	6697	6590	6483	6483	6424	6355	6284	6213	6139	6065	5991	5917	5843	5769	5695							
66	7034	7029	7010	6980	6937	6888	6820	6724	6617	6510	6403	6403	6344	6275	6204	6133	6059	5985	5911	5837	5763	5689	5615							
67	6954	6949	6930	6900	6857	6808	6740	6644	6537	6430	6323	6323	6264	6195	6124	6053	5979	5905	5831	5757	5683	5609	5535							
68	6873	6868	6849	6819	6776	6727	6658	6562	6455	6348	6241	6241	6182	6113	6042	5971	5897	5823	5749	5675	5601	5527	5453							
69	6792	6787	6768	6738	6695	6646	6577	6481	6374	6267	6160	6160	6101	6032	5961	5890	5816	5742	5668	5594	5520	5446	5372							
70	6710	6706	6687	6657	6614	6565	6496	6400	6293	6186	6079	6079	6020	5951	5880	5809	5735	5661	5587	5513	5439	5365	5291							
71	6628	6624	6605	6575	6532	6483	6414	6318	6211	6104	6007	6007	5948	5879	5808	5737	5663	5589	5515	5441	5367	5293	5219							
72	6545	6541	6522	6492	6449	6399	6330	6234	6127	6020	5923	5923	5864	5795	5724	5653	5579	5505	5431	5357	5283	5209	5135							
73	6462	6458	6439	6409	6366	6317	6248	6152	6045	5938	5841	5841	5782	5713	5642	5571	5497	5423	5349	5275	5201	5127	5053							
74	6378	6374	6355	6325	6282	6233	6164	6068	5961	5854	5757	5757	5698	5629	5558	5487	5413	5339	5265	5191	5117	5043	4969							
75	6291	6287	6268	6238	6195	6146	6077	5981	5874	5767	5670	5670	5611	5542	5471	5400	5326	5252	5178	5104	5030	4956	4882							
76	6206	6202	6183	6153	6110	6061	5992	5896	5789	5682	5585	5585	5526	5457	5386	5315	5241	5167	5093	5019	4945	4871	4797							
77	6125	6121	6102	6072	6029	5980	5911	5815	5708	5601	5504	5504	5445	5376	5305	5234	5160	5086	5012	4938	4864	4790	4716							
78	6039	6036	6017	6000	5957	5908	5839	5743	5636	5529	5432	5432	5373	5304	5233	5162	5088	5014	4940	4866	4792	4718	4644							
79	5954	5951	5932	5902	5859	5810	5741	5645	5538	5431	5334	5334	5275	5206	5135	5064	4990	4916	4842	4768	4694	4620	4546							
80	5868	5865	5846	5816	5773	5724	5655	5559	5452	5345	5248	5248	5189	5120	5049	4978	4904	4830	4756	4682	4608	4534	4460							
81	5782	5779	5760	5730	5687	5638	5569	5473	5366	5259	5162	5162	5103	5034	4963	4892	4818	4744	4670	4596	4522	4448	4374							
82	5696	5693	5674	5644	5601	5552	5483	5387	5280	5173	5076	5076	5017	4948	4877	4806	4732	4658	4584	4510	4436	4362	4288							
83	5609	5606	5587	5557	5514	5465	5396	5300	5193	5086	4989	4989	4930	4861	4790	4719	4645	4571	4497	4423	4349	4275	4201							
84	5523	5519	5500	5470	5427	5378	5309	5213	5106	5009	4912	4912	4853	4784	4713	4642	4568	4494	4420	4346	4272	4198	4124							
85	5436	5433	5414	5384	5341	5292	5223	5127	5020	4923	4826	4826	4767	4698	4627	4556	4482	4408	4334	4260	4186	4112	4038							
86	5349	5346	5327	5297	5254	5205	5136	5040	4933	4836	4739	4739	4680	4611	4540	4469	4395	4321	4247	4173	4099	4025	3951							
87	5262	5259	5240	5210	5167	5118	5049	4953	4846	4749	4652	4652	4593	4524	4453	4382	4308	4234	4160	4086	4012	3938	386							

$\sin \alpha \sin \beta \cos i$. [On a $f(\alpha, \beta, i) = F(\alpha - \beta) + G(\alpha + \beta)$.]

lus en haut et à gauche; le signe est celui de $\cos(\alpha - \beta)$.

30°	31°	32°	33°	34°	35°	36°	37°	38°	39°	40°	41°	42°	43°	44°	45°	46°	47°	48°	49°	50°	
150.	149.	148.	147.	146.	145.	144.	143.	142.	141.	140.	139.	138.	137.	136.	135.	134.	133.	132.	131.	130.	
210.	211.	212.	213.	214.	215.	216.	217.	218.	219.	220.	221.	222.	223.	224.	225.	226.	227.	228.	229.	230.	
330.	329.	328.	327.	326.	325.	324.	323.	322.	321.	320.	319.	318.	317.	316.	315.	314.	313.	312.	311.	310.	
8660	8572	8480	8387	8290	8191	8090	7986	7880	7771	7660	7547	7431	7314	7193	7071	6947	6820	6691	6561	6428	180°
8564	8478	8388	8295	8200	8102	8002	7899	7794	7686	7577	7465	7350	7234	7115	6994	6871	6745	6618	6489	6358	170
8463	8378	8288	8195	8100	8000	7900	7797	7690	7582	7473	7361	7245	7129	7010	6889	6766	6641	6515	6387	6256	168
8362	8277	8187	8094	8000	7900	7800	7697	7590	7482	7373	7261	7145	7029	6910	6789	6666	6541	6415	6287	6156	166
8261	8176	8086	7993	7900	7800	7700	7597	7490	7382	7273	7161	7045	6929	6810	6689	6566	6441	6315	6187	6056	164
8160	8075	7985	7892	7800	7700	7600	7497	7390	7282	7173	7061	6945	6829	6710	6589	6466	6341	6215	6087	5956	162
8059	7974	7884	7791	7700	7600	7500	7397	7290	7182	7073	6961	6845	6729	6610	6489	6366	6241	6115	5987	5856	160
7958	7873	7783	7690	7600	7500	7400	7297	7190	7082	6973	6861	6745	6629	6510	6389	6266	6141	6015	5887	5756	158
7857	7772	7682	7589	7500	7400	7300	7197	7090	6982	6873	6761	6645	6529	6410	6289	6166	6041	5915	5787	5656	156
7756	7671	7581	7488	7400	7300	7200	7097	6990	6882	6773	6661	6545	6429	6310	6189	6066	5941	5815	5687	5556	154
7655	7570	7480	7387	7300	7200	7100	6997	6890	6782	6673	6561	6445	6329	6210	6089	5966	5841	5715	5587	5456	152
7554	7469	7379	7286	7200	7100	7000	6897	6790	6682	6573	6461	6345	6229	6110	5989	5866	5741	5615	5487	5356	150
7453	7368	7278	7185	7100	7000	6900	6797	6690	6582	6473	6361	6245	6129	6010	5889	5766	5641	5515	5387	5256	148
7352	7267	7177	7084	7000	6900	6800	6697	6590	6482	6373	6261	6145	6029	5910	5789	5666	5541	5415	5287	5156	146
7251	7166	7076	6983	6900	6800	6700	6597	6490	6382	6273	6161	6045	5929	5810	5689	5566	5441	5315	5187	5056	144
7150	7065	6975	6882	6800	6700	6600	6497	6390	6282	6173	6061	5945	5829	5710	5589	5466	5341	5215	5087	4956	142
7049	6964	6874	6781	6700	6600	6500	6397	6290	6182	6073	5961	5845	5729	5610	5489	5366	5241	5115	4987	4856	140
6948	6863	6773	6680	6600	6500	6400	6297	6190	6082	5973	5861	5745	5629	5510	5389	5266	5141	5015	4887	4756	138
6847	6762	6672	6579	6500	6400	6300	6197	6090	5982	5873	5761	5645	5529	5410	5289	5166	5041	4915	4787	4656	136
6746	6661	6571	6478	6400	6300	6200	6097	5990	5882	5773	5661	5545	5429	5310	5189	5066	4941	4815	4687	4556	134
6645	6560	6470	6377	6300	6200	6100	5997	5890	5782	5673	5561	5445	5329	5210	5089	4966	4841	4715	4587	4456	132
6544	6459	6369	6276	6200	6100	6000	5897	5790	5682	5573	5461	5345	5229	5110	4989	4866	4741	4615	4487	4356	130
6443	6358	6268	6175	6100	6000	5900	5797	5690	5582	5473	5361	5245	5129	5010	4889	4766	4641	4515	4387	4256	128
6342	6257	6167	6074	6000	5900	5800	5697	5590	5482	5373	5261	5145	5029	4910	4789	4666	4541	4415	4287	4156	126
6241	6156	6066	5973	5900	5800	5700	5597	5490	5382	5273	5161	5045	4929	4810	4689	4566	4441	4315	4187	4056	124
6140	6055	5965	5872	5800	5700	5600	5497	5390	5282	5173	5061	4945	4829	4710	4589	4466	4341	4215	4087	3956	122
6039	5954	5864	5771	5700	5600	5500	5397	5290	5182	5073	4961	4845	4729	4610	4489	4366	4241	4115	3987	3856	120
5938	5853	5763	5670	5600	5500	5400	5297	5190	5082	4973	4861	4745	4629	4510	4389	4266	4141	4015	3887	3756	118
5837	5752	5662	5569	5500	5400	5300	5197	5090	4982	4873	4761	4645	4529	4410	4289	4166	4041	3915	3787	3656	116
5736	5651	5561	5468	5400	5300	5200	5097	4990	4882	4773	4661	4545	4429	4310	4189	4066	3941	3815	3687	3556	114
5635	5550	5460	5367	5300	5200	5100	4997	4890	4782	4673	4561	4445	4329	4210	4089	3966	3841	3715	3587	3456	112
5534	5449	5359	5266	5200	5100	5000	4897	4790	4682	4573	4461	4345	4229	4110	3989	3866	3741	3615	3487	3356	110
5433	5348	5258	5165	5100	5000	4900	4797	4690	4582	4473	4361	4245	4129	4010	3889	3766	3641	3515	3387	3256	108
5332	5247	5157	5064	5000	4900	4800	4697	4590	4482	4373	4261	4145	4029	3910	3789	3666	3541	3415	3287	3156	106
5231	5146	5056	4963	4900	4800	4700	4597	4490	4382	4273	4161	4045	3929	3810	3689	3566	3441	3315	3187	3056	104
5130	5045	4955	4862	4800	4700	4600	4497	4390	4282	4173	4061	3945	3829	3710	3589	3466	3341	3215	3087	2956	102
5029	4944	4854	4761	4700	4600	4500	4397	4290	4182	4073	3961	3845	3729	3610	3489	3366	3241	3115	2987	2856	100
4928	4843	4753	4660	4600	4500	4400	4297	4190	4082	3973	3861	3745	3629	3510	3389	3266	3141	3015	2887	2756	98
4827	4742	4652	4559	4500	4400	4300	4197	4090	3982	3873	3761	3645	3529	3410	3289	3166	3041	2915	2787	2656	96
4726	4641	4551	4458	4400	4300	4200	4097	3990	3882	3773	3661	3545	3429	3310	3189	3066	2941	2815	2687	2556	94
4625	4540	4450	4357	4300	4200	4100	3997	3890	3782	3673	3561	3445	3329	3210	3089	2966	2841	2715	2587	2456	92
4524	4439	4349	4256	4200	4100	4000	3897	3790	3682	3573	3461	3345	3229	3110	2989	2866	2741	2615	2487	2356	90
4423	4338	4248	4155	4100	4000	3900	3797	3690	3582	3473	3361	3245	3129	3010	2889	2766	2641	2515	2387	2256	88
4322	4237	4147	4054	4000	3900	3800	3697	3590	3482	3373	3261	3145	3029	2910	2789	2666	2541	2415	2287	2156	86
4221	4136	4046	3953	3900	3800	3700	3597	3490	3382	3273	3161	3045	2929	2810	2689	2566	2441	2315	2187	2056	84
4120	4035	3945	3852	3800	3700	3600	3497	3390	3282	3173	3061	2945	2829	2710	2589	2466	2341	2215	2087	1956	82
4019	3934	3844	3751	3700	3600	3500	3397	3290	3182	3073	2961	2845	2729	2610	2489	2366	2241	2115	1987	1856	80
3918	3833	3743	3650	3600	3500	3400	3297	3190	3082	2973	2861	2745	2629	2510	2389	2266	2141	2015	1887	1756	78
3817	3732	3642	3549	3500	3400	3300	3197	3090	2982	2873	2761	2645	2529	2410	2289	2166	2041	1915	1787	1656	76
3716	3631	3541	3448	3400	3300	3200	3097	2990	2882	2773	2661	2545	2429	2310	2189	2066	1941	1815	1687	1556	74
3615	3530	3440	3347	3300	3200	3100	2997	2890	2782	2673	2561	2445	2329	2210	2089	1966	1841	1715	1587	1456	72
3514	3429	3339	3246	3200	3100	3000	2897	2790	2682	2573	2461	2345	2229	2110	1989	1866	1741	1615	1487	1356	70
3413	3328	3238	3145	3100	3000	2900	2797	2690	2582	2473	2361	2245	2129	2010	1889	1766	1641	1515	1387	1256	68
3312	3227	3137	3044	3000	2900	2800	2697	2590	2482	2373	2261	2145	2029	1910	1789	1666	1541	1415	1287	1156	66
3211	3126	3036	2943	2900	2800	2700	2597	2490	2382	2273	2161	2045	1929	1810	1689	1566	1441	1315	1187	1056	64
3110	3025	2935	2842	2800	2700	2600	2497	2390	2282	2173	2061	1945	1829	1710	1589	1466	1341	1215	1087	956	62
3009	2924	2834	2741	2700	2600	2500	2397	2290	2182	2073	1961	1845									

TABLE I (voir p. 23). — VALEUR DE LA FONCTION $f(\alpha, \beta, i) = \cos \alpha \cos \beta$

Valeur de F(α - β), en dix-millièmes. — Les arguments doivent																						
α - β		50°.	51°.	52°.	53°.	54°.	55°.	56°.	57°.	58°.	59°.	60°.	61°.	62°.	63°.	64°.	65°.	66°.	67°.	68°.	69°.	70°.
Signe de F	+ - +	130.	129.	128.	127.	126.	125.	124.	123.	122.	121.	120.	119.	118.	117.	116.	115.	114.	113.	112.	111.	110.
		230.	231.	232.	233.	234.	235.	236.	237.	238.	239.	240.	241.	242.	243.	244.	245.	246.	247.	248.	249.	250.
		310.	309.	308.	307.	306.	305.	304.	303.	302.	301.	300.	299.	298.	297.	296.	295.	294.	293.	292.	291.	290.
i = 0°		6428	6293	6157	6018	5878	5736	5592	5446	5299	5150	5000	4848	4695	4540	4384	4226	4067	3907	3746	3584	3420
10		6379	6245	6110	5972	5833	5692	5549	5405	5259	5111	4962	4811	4659	4505	4350	4194	4037	3878	3718	3556	3394
12		6358	6224	6089	5952	5814	5673	5531	5387	5241	5094	4946	4795	4643	4490	4336	4180	4023	3865	3705	3545	3383
14		6332	6200	6065	5929	5791	5651	5509	5366	5221	5074	4926	4776	4625	4473	4319	4163	4007	3849	3690	3530	3369
16		6303	6171	6037	5901	5764	5625	5484	5341	5197	5051	4903	4754	4604	4452	4299	4144	3989	3832	3674	3514	3353
18		6271	6139	6006	5871	5734	5595	5455	5313	5170	5024	4878	4729	4580	4429	4276	4123	3968	3812	3654	3496	3336
20		6234	6103	5971	5837	5701	5563	5423	5282	5139	4993	4849	4702	4553	4403	4251	4099	3945	3790	3633	3476	3317
22		6194	6064	5933	5799	5664	5527	5388	5248	5106	4963	4818	4672	4524	4375	4224	4072	3919	3765	3610	3453	3296
24		6150	6021	5890	5758	5624	5488	5350	5211	5070	4928	4784	4638	4492	4344	4194	4043	3891	3738	3584	3429	3272
26		6102	5975	5845	5713	5580	5445	5309	5171	5031	4890	4747	4603	4457	4310	4162	4012	3861	3710	3556	3402	3247
28		6052	5925	5796	5666	5534	5400	5265	5128	4989	4849	4708	4564	4420	4274	4127	3979	3829	3679	3527	3374	3220
30		5997	5872	5744	5615	5484	5351	5217	5082	4944	4805	4665	4523	4380	4236	4090	3943	3795	3646	3495	3344	3191
32		5940	5815	5689	5561	5431	5300	5167	5033	4897	4759	4620	4480	4338	4195	4051	3905	3758	3610	3461	3311	3160
34		5879	5755	5630	5504	5376	5246	5114	4981	4846	4710	4573	4434	4294	4152	4009	3865	3720	3573	3426	3277	3128
36		5814	5692	5569	5444	5317	5188	5058	4926	4793	4659	4523	4385	4247	4107	3965	3823	3679	3534	3388	3242	3094
38		5747	5626	5504	5380	5254	5128	4999	4869	4738	4604	4470	4334	4197	4059	3919	3778	3636	3493	3349	3204	3058
40		5676	5557	5437	5314	5190	5065	4938	4809	4679	4548	4415	4281	4146	4009	3871	3732	3592	3450	3308	3165	3020
42		5602	5485	5366	5245	5123	4999	4874	4747	4619	4489	4358	4225	4092	3957	3821	3683	3545	3406	3265	3123	2981
44		5526	5410	5293	5174	5053	4931	4807	4682	4556	4428	4299	4168	4036	3903	3769	3633	3497	3359	3220	3081	2941
46		5447	5332	5217	5099	4981	4860	4738	4615	4490	4364	4237	4108	3978	3847	3713	3581	3446	3311	3174	3037	2898
48		5365	5252	5138	5023	4905	4787	4667	4545	4423	4298	4173	4046	3918	3789	3659	3527	3394	3261	3126	2991	2854
50		5280	5169	5057	4943	4828	4711	4593	4474	4353	4231	4107	3982	3856	3729	3601	3471	3341	3210	3077	2944	2809
52		5193	5084	4973	4862	4748	4634	4517	4400	4281	4161	4039	3917	3793	3668	3541	3414	3286	3156	3026	2895	2763
54		5103	4996	4888	4778	4666	4554	4439	4324	4207	4089	3970	3849	3727	3604	3480	3355	3229	3102	2974	2845	2715
56		5011	4906	4800	4692	4582	4472	4359	4246	4131	4015	3898	3779	3660	3539	3417	3295	3171	3046	2920	2794	2666
58		4917	4814	4710	4604	4496	4388	4278	4166	4053	3938	3825	3709	3591	3473	3353	3233	3111	2989	2866	2741	2616
60		4821	4720	4617	4514	4408	4302	4194	4085	3974	3863	3750	3636	3521	3405	3288	3170	3051	2930	2810	2688	2566
61		4772	4672	4571	4468	4364	4258	4152	4043	3934	3824	3712	3599	3485	3370	3255	3138	3020	2901	2781	2661	2540
62		4723	4624	4524	4422	4319	4214	4109	4002	3894	3784	3674	3562	3449	3336	3221	3105	2988	2871	2752	2633	2511
63		4673	4575	4476	4375	4273	4170	4066	3960	3853	3744	3635	3525	3413	3301	3187	3073	2957	2841	2723	2605	2487
64		4623	4526	4428	4328	4227	4125	4022	3917	3811	3704	3596	3487	3376	3265	3153	3039	2924	2810	2694	2577	2460
65		4572	4476	4379	4281	4181	4080	3978	3874	3769	3664	3557	3449	3339	3229	3117	3006	2893	2779	2665	2549	2433
66		4521	4426	4330	4233	4134	4034	3933	3831	3727	3623	3517	3410	3302	3193	3082	2973	2861	2748	2635	2521	2406
67		4470	4376	4281	4185	4087	3989	3888	3787	3685	3581	3477	3371	3265	3157	3048	2939	2828	2717	2605	2492	2379
68		4418	4325	4231	4136	4040	3942	3843	3743	3642	3540	3437	3332	3227	3120	3013	2905	2795	2685	2575	2463	2351
69		4366	4274	4181	4087	3992	3896	3798	3699	3599	3498	3396	3293	3189	3083	2977	2870	2762	2654	2545	2434	2323
70		4313	4223	4131	4038	3944	3849	3752	3655	3556	3456	3355	3253	3150	3046	2941	2836	2729	2622	2514	2405	2295
71		4260	4171	4081	3989	3896	3802	3706	3610	3512	3414	3314	3213	3112	3009	2905	2801	2696	2590	2483	2375	2267
72		4207	4119	4030	3939	3847	3754	3660	3565	3468	3371	3273	3173	3073	2972	2869	2766	2662	2557	2452	2346	2238
73		4154	4067	3978	3889	3798	3706	3613	3519	3424	3328	3231	3133	3034	2934	2833	2731	2628	2525	2421	2316	2210
74		4100	4014	3927	3839	3749	3658	3567	3474	3380	3285	3189	3092	2994	2896	2796	2696	2594	2492	2389	2286	2181
75		4046	3961	3875	3788	3700	3610	3520	3428	3335	3242	3147	3052	2955	2858	2759	2660	2560	2459	2358	2256	2153
76		3991	3908	3823	3737	3650	3562	3472	3382	3291	3198	3105	3010	2915	2819	2722	2624	2526	2426	2326	2225	2124
77		3937	3854	3771	3686	3600	3513	3425	3336	3246	3154	3063	2969	2875	2781	2685	2588	2491	2393	2294	2195	2095
78		3882	3801	3718	3635	3550	3464	3377	3289	3200	3111	3020	2928	2835	2742	2648	2552	2456	2360	2261	2164	2066
79		3827	3747	3666	3583	3500	3415	3330	3243	3155	3067	2977	2887	2795	2703	2610	2516	2422	2326	2231	2134	2036
80		3772	3693	3613	3532	3449	3366	3281	3196	3110	3022	2934	2845	2755	2664	2572	2480	2387	2293	2198	2103	2007
81		3717	3																			

$\sin \alpha \sin \beta \cos i$. [On a $f(\alpha, \beta, i) = F(\alpha - \beta) + G(\alpha + \beta)$]

ne lus en haut et à gauche; le signe est celui de $\cos(\alpha - \beta)$.

71°	72°	73°	74°	75°	76°	77°	78°	79°	80°	81°	82°	83°	84°	85°	86°	87°	88°	89°	90°	
109.	108.	107.	106.	105.	104.	103.	102.	101.	100.	99.	98.	97.	96.	95.	94.	93.	92.	91.	90.	
251.	252.	253.	254.	255.	256.	257.	258.	259.	260.	261.	262.	263.	264.	265.	266.	267.	268.	269.	270.	
289.	288.	287.	286.	285.	284.	283.	282.	281.	280.	279.	278.	277.	276.	275.	274.	273.	272.	271.	270.	
3256	3090	2924	2756	2588	2419	2250	2079	1908	1736	1564	1392	1219	1045	872	698	523	349	175	0	180°
3231	3067	2901	2735	2569	2401	2232	2063	1894	1723	1552	1381	1209	1037	865	692	519	346	173	0	170
3220	3056	2892	2726	2560	2393	2225	2056	1887	1717	1547	1377	1205	1034	862	689	518	345	172	0	168
3207	3044	2880	2715	2550	2383	2216	2048	1880	1711	1541	1371	1201	1030	859	687	516	344	171	0	166
3193	3030	2867	2703	2538	2372	2206	2039	1871	1703	1534	1365	1195	1025	855	684	515	343	170	0	164
3176	3015	2852	2689	2525	2360	2194	2028	1861	1694	1526	1358	1189	1020	850	682	514	342	169	0	162
3158	2997	2836	2673	2510	2346	2182	2016	1851	1684	1517	1350	1182	1014	845	677	508	338	169	0	160
3137	2978	2817	2656	2494	2331	2168	2003	1839	1673	1507	1341	1174	1007	840	672	504	336	168	0	158
3115	2957	2797	2637	2476	2315	2152	1989	1826	1661	1497	1332	1166	1000	834	667	501	334	167	0	156
3091	2934	2776	2617	2457	2297	2136	1974	1811	1649	1485	1321	1157	993	827	662	497	331	166	0	154
3065	2909	2753	2595	2437	2278	2118	1957	1796	1635	1473	1310	1147	984	821	657	493	329	164	0	152
3038	2883	2728	2572	2415	2257	2099	1940	1780	1620	1460	1299	1137	975	813	651	488	326	163	0	150
3008	2855	2702	2547	2392	2235	2079	1921	1763	1605	1445	1286	1126	966	805	645	484	323	161	0	148
2977	2826	2674	2521	2367	2212	2057	1901	1745	1588	1431	1273	1115	956	797	638	479	319	160	0	146
2945	2795	2645	2493	2341	2188	2035	1881	1726	1571	1415	1259	1102	946	788	631	473	316	158	0	144
2911	2763	2614	2464	2314	2163	2011	1859	1706	1552	1399	1244	1090	935	779	624	468	313	156	0	142
2875	2729	2582	2434	2286	2136	1986	1836	1685	1533	1381	1229	1076	923	770	616	462	308	154	0	140
2838	2693	2552	2402	2256	2109	1961	1812	1663	1513	1363	1213	1062	911	760	608	456	304	152	0	138
2799	2657	2514	2370	2225	2080	1934	1787	1640	1493	1345	1196	1048	899	749	600	450	300	150	0	136
2759	2618	2477	2336	2193	2050	1906	1762	1617	1471	1326	1179	1033	886	739	591	444	296	148	0	134
2717	2579	2440	2300	2160	2019	1877	1735	1592	1449	1306	1161	1017	872	728	582	437	291	146	0	132
2674	2538	2402	2264	2126	1987	1848	1708	1567	1426	1285	1143	1001	859	716	573	430	287	143	0	130
2630	2496	2362	2227	2091	1954	1817	1680	1541	1403	1264	1124	985	845	704	564	423	282	141	0	128
2585	2453	2321	2188	2055	1921	1786	1651	1515	1379	1242	1103	968	830	692	554	416	277	139	0	126
2538	2409	2279	2149	2018	1886	1754	1621	1488	1354	1220	1085	950	815	680	544	409	273	136	0	124
2490	2364	2237	2109	1980	1851	1721	1590	1460	1328	1197	1065	932	800	667	533	400	267	134	0	122
2442	2318	2193	2067	1941	1814	1687	1559	1431	1302	1173	1044	914	784	654	523	393	262	131	0	120
2417	2294	2171	2046	1922	1796	1670	1544	1417	1289	1161	1034	905	776	647	518	389	259	130	0	119
2392	2270	2148	2025	1902	1778	1654	1528	1402	1276	1149	1023	895	768	640	513	385	256	128	0	117
2367	2246	2124	2004	1882	1759	1636	1512	1387	1263	1137	1012	886	760	634	508	381	254	127	0	116
2341	2222	2103	1982	1861	1740	1618	1495	1372	1249	1125	1001	876	752	627	502	376	251	125	0	116
2316	2198	2080	1961	1841	1721	1600	1479	1357	1235	1113	990	867	744	620	497	372	248	124	0	115
2290	2174	2056	1939	1821	1702	1582	1462	1342	1221	1100	979	857	735	613	491	368	245	123	0	114
2264	2149	2033	1917	1800	1683	1564	1446	1327	1207	1088	968	848	727	606	485	364	243	122	0	113
2238	2124	2009	1894	1779	1663	1546	1429	1311	1193	1075	957	838	719	599	479	360	240	120	0	112
2212	2099	1986	1872	1758	1643	1528	1412	1296	1179	1063	946	828	711	592	474	356	237	119	0	111
2185	2073	1962	1850	1737	1623	1509	1395	1280	1165	1050	934	818	702	585	468	351	234	117	0	110
2158	2048	1938	1827	1715	1604	1491	1378	1265	1151	1037	922	808	693	578	462	347	231	116	0	109
2131	2023	1914	1804	1694	1583	1472	1361	1249	1137	1024	911	798	684	570	457	343	228	114	0	108
2104	1997	1889	1781	1672	1563	1454	1344	1233	1122	1011	899	788	676	563	451	338	226	113	0	107
2077	1971	1865	1758	1651	1543	1435	1326	1217	1108	998	888	777	667	556	445	334	223	111	0	106
2049	1945	1840	1735	1629	1523	1416	1309	1201	1093	985	876	767	658	549	439	329	220	110	0	105
2022	1919	1816	1712	1606	1502	1397	1291	1185	1078	971	864	757	649	541	433	325	217	108	0	104
1994	1893	1791	1688	1585	1482	1378	1273	1169	1064	958	852	747	640	534	427	321	214	107	0	103
1966	1866	1766	1665	1563	1461	1359	1256	1152	1049	945	840	736	631	526	421	316	211	105	0	102
1938	1840	1741	1641	1541	1440	1339	1238	1136	1034	931	829	726	622	519	415	312	208	104	0	101
1910	1813	1716	1617	1519	1420	1320	1220	1120	1019	918	817	715	613	511	409	307	205	102	0	100
1883	1787	1691	1594	1497	1399	1301	1202	1103	1004	905	805	705	604	504	403	303	202	101	0	99
1854	1760	1665	1570	1474	1378	1281	1184	1087	989	891	793	694	595	496	397	298	199	100	0	98
1826	1733	1640	1546	1452	1357	1262	1166	1070	974	878	781	684	586	489	391	294	196	99	0	97
1798	1707	1615	1522	1429	1336	1242	1148	1054	959	864	769	673	577	481	385	289	193	98	0	96
1770	1680	1589	1498	1407	1315	1223	1130	1037	944	850	757	663	568	474	379	284	190	97	0	95
1741	1653	1564	1474	1384	1294	1203	1112	1021	929	837	744	652	559	466	373	280	186	96	0	94
1713	1626	1538	1450	1362	1273	1184	1094	1004	914	823	732	641	550	459	367	275	184	95	0	93
1685	1599	1513	1426	1340	1252	1164	1076	987	899	809	720	631	541	451	361	271	181	94	0	92
1656	1572	1487	1402	1318	1231	1144	1058	971												

TABLE I (voir p. 23). — VALEUR DE LA FONCTION $f(\alpha, \beta, i) = \cos \alpha \cos \beta$

$\alpha - \beta$		Valeur de $F(\alpha - \beta)$, en dix-millièmes. — Les arguments doivent être en degrés.																															
		0°. 180. 360.	2°. 178. 358.	4°. 176. 356.	6°. 174. 354.	8°. 172. 352.	10°. 170. 350.	12°. 168. 348.	14°. 166. 346.	16°. 164. 344.	18°. 162. 342.	20°. 160. 340.	22°. 159. 339.	24°. 158. 338.	26°. 157. 337.	28°. 156. 336.	30°. 155. 335.	32°. 154. 334.	34°. 153. 333.	36°. 152. 332.	38°. 151. 331.												
$i =$	Signe de F	0°. 180. 360.	2°. 178. 358.	4°. 176. 356.	6°. 174. 354.	8°. 172. 352.	10°. 170. 350.	12°. 168. 348.	14°. 166. 346.	16°. 164. 344.	18°. 162. 342.	20°. 160. 340.	22°. 159. 339.	24°. 158. 338.	26°. 157. 337.	28°. 156. 336.	30°. 155. 335.	32°. 154. 334.	34°. 153. 333.	36°. 152. 332.	38°. 151. 331.												
		+	-	+	-	+	-	+	-	+	-	+	-	+	-	+	-	+	-	+	-	+											
90		5000	4997	4988	4973	4951	4924	4891	4851	4806	4755	4699	4636	4568	4494	4415	4331	4242	4148	4050	3948	3842	3732	3618	3500	3378	3252	3122	2989	2852	2711	2566	2418
91		4913	4910	4901	4886	4865	4838	4805	4767	4723	4673	4617	4555	4488	4416	4337	4253	4164	4069	3971	3869	3763	3653	3539	3421	3299	3173	3043	2908	2770	2629	2481	2326
92		4826	4823	4814	4799	4779	4752	4720	4682	4639	4590	4535	4474	4408	4337	4261	4180	4094	3997	3896	3791	3682	3569	3453	3334	3211	3084	2953	2817	2677	2529	2375	2215
93		4738	4735	4727	4712	4693	4666	4634	4598	4555	4507	4453	4393	4328	4258	4183	4103	4017	3918	3815	3709	3600	3487	3371	3252	3129	3002	2869	2732	2585	2436	2282	2119
94		4651	4648	4640	4625	4606	4580	4549	4513	4471	4424	4371	4313	4248	4178	4103	4023	3925	3821	3715	3606	3493	3377	3258	3135	3007	2874	2736	2589	2439	2285	2122	1957
95		4564	4561	4553	4539	4520	4495	4464	4429	4388	4341	4289	4231	4166	4096	4021	3941	3854	3759	3655	3542	3427	3309	3188	3064	2936	2802	2664	2517	2362	2207	2043	1878
96		4477	4475	4467	4453	4434	4409	4379	4344	4304	4259	4207	4149	4084	4014	3939	3864	3780	3687	3583	3470	3354	3235	3113	2989	2860	2726	2587	2440	2285	2129	1964	1798
97		4391	4388	4380	4366	4348	4324	4294	4260	4221	4176	4126	4070	4005	3935	3860	3785	3701	3608	3504	3390	3273	3154	3032	2907	2778	2644	2505	2359	2204	2047	1881	1714
98		4304	4301	4294	4280	4263	4239	4210	4176	4138	4094	4045	4015	3950	3880	3805	3730	3646	3553	3450	3336	3219	3100	2978	2853	2724	2590	2450	2304	2147	1980	1812	1643
99		4218	4215	4208	4195	4177	4154	4125	4092	4055	4011	3963	3913	3858	3788	3713	3638	3545	3452	3349	3235	3118	3000	2878	2753	2624	2489	2347	2199	2041	1873	1704	1534
100		4132	4129	4123	4109	4092	4069	4041	4009	3972	3930	3883	3833	3778	3708	3633	3558	3465	3372	3269	3155	3038	2919	2800	2677	2548	2409	2264	2106	1947	1778	1608	1437
101		4046	4043	4036	4024	4007	3984	3957	3926	3889	3848	3802	3751	3696	3626	3551	3468	3375	3272	3159	3042	2923	2804	2682	2554	2415	2270	2112	1953	1784	1614	1443	1271
102		3961	3958	3951	3939	3922	3900	3874	3843	3807	3767	3722	3673	3620	3563	3493	3420	3345	3260	3147	3030	2911	2792	2670	2542	2403	2258	2099	1939	1770	1600	1428	1255
103		3875	3873	3866	3854	3838	3816	3790	3760	3726	3686	3641	3592	3539	3483	3424	3363	3300	3235	3168	3050	2931	2812	2690	2562	2423	2278	2119	1959	1789	1618	1445	1271
104		3790	3788	3782	3770	3754	3733	3707	3678	3645	3605	3560	3511	3458	3402	3343	3282	3219	3154	3088	2970	2851	2732	2610	2482	2337	2178	2018	1857	1686	1514	1340	1164
105		3706	3704	3697	3685	3669	3648	3622	3593	3560	3520	3475	3426	3373	3317	3258	3197	3134	3069	2993	2917	2800	2681	2562	2440	2305	2146	1985	1823	1651	1478	1303	1126
106		3622	3620	3613	3602	3586	3565	3540	3511	3478	3438	3393	3344	3291	3235	3176	3115	3052	2987	2911	2835	2718	2600	2481	2359	2224	2064	1902	1739	1565	1390	1214	1037
107		3538	3536	3530	3519	3503	3482	3457	3428	3395	3355	3310	3261	3208	3152	3093	3032	2969	2904	2828	2752	2635	2517	2397	2274	2149	1988	1825	1661	1486	1311	1134	956
108		3455	3453	3447	3436	3420	3400	3375	3346	3313	3273	3228	3179	3126	3070	3011	2950	2887	2822	2755	2679	2603	2486	2367	2244	2119	1957	1794	1629	1463	1287	1110	932
109		3372	3370	3364	3354	3338	3318	3293	3264	3231	3191	3146	3097	3044	2988	2929	2868	2805	2740	2673	2605	2488	2369	2246	2121	1959	1795	1630	1464	1287	1109	931	752
110		3290	3288	3282	3272	3256	3236	3211	3182	3149	3110	3065	3016	2963	2907	2848	2787	2724	2659	2592	2524	2407	2288	2165	2040	1877	1712	1546	1379	1211	1042	863	684
111		3208	3206	3200	3190	3174	3154	3129	3099	3066	3027	2982	2933	2880	2823	2764	2703	2640	2575	2508	2440	2322	2201	2078	1953	1789	1623	1456	1288	1119	949	770	590
112		3127	3125	3120	3110	3094	3074	3049	3019	2986	2947	2902	2853	2800	2743	2684	2623	2560	2495	2428	2360	2242	2120	1995	1870	1705	1538	1370	1201	1031	860	680	500
113		3046	3044	3040	3030	3014	3000	2979	2959	2939	2919	2899	2879	2859	2839	2819	2799	2779	2759	2739	2719	2699	2679	2659	2639	2619	2599	2579	2559	2539	2519	2499	2479
114		2966	2964	2960	2950	2934	2914	2889	2859	2826	2787	2742	2693	2640	2583	2524	2463	2400	2335	2268	2200	2082	1961	1837	1712	1587	1461	1334	1206	1077	947	816	684
115		2887	2885	2880	2871	2855	2835	2810	2780	2747	2708	2663	2614	2561	2504	2445	2384	2321	2256	2189	2121	2003	1882	1758	1632	1505	1377	1248	1118	987	855	722	589
116		2808	2806	2802	2793	2777	2757	2732	2702	2669	2630	2585	2536	2483	2426	2367	2306	2243	2178	2111	2043	1925	1803	1678	1551	1422	1292	1161	1029	896	762	628	494
117		2730	2728	2724	2715	2700	2680	2655	2625	2592	2553	2508	2459	2406	2349	2290	2229	2166	2101	2034	1966	1848	1725	1600	1473	1344	1213	1081	948	814	679	544	409
118		2652	2650	2646	2638	2622	2602	2577	2547	2514	2475	2430	2381	2328	2271	2212	2151	2088	2023	1956	1888	1769	1645	1518	1389	1258	1125	991	856	720	584	448	312
119		2576	2574	2570	2562	2546	2526	2501	2471	2438	2400	2355	2306	2253	2196	2137	2076	2013	1948	1881	1813	1694	1570	1443	1314	1183	1050	915	779	642	505	368	231
120		2500	2498	2494	2486	2470	2450	2425	2395	2362	2323	2278	2229	2176	2119	2060	1999	1936	1871	1804	1736	1617	1492	1364	1234	1102	968	832	695	557	419	281	143
122		2350	2348	2344	2337	2321	2301	2276	2246	2213	2174	2129	2080	2027	1970	1911	1850	1787	1722	1655	1587	1467	1341	1211	1078	943	806	668	529	389			

$\sin \alpha \sin \beta \cos i$. [On a $f(\alpha, \beta, i) = F(\alpha - \beta) + G(\alpha + \beta)$.]

lus en haut et à gauche; le signe est celui de $\cos(\alpha - \beta)$.

30°.	31°.	32°.	33°.	34°.	35°.	36°.	37°.	38°.	39°.	40°.	41°.	42°.	43°.	44°.	45°.	46°.	47°.	48°.	49°.	50°.	
50.	149.	148.	147.	146.	145.	144.	143.	142.	141.	140.	139.	138.	137.	136.	135.	134.	133.	132.	131.	130.	
10.	211.	212.	213.	214.	215.	216.	217.	218.	219.	220.	221.	222.	223.	224.	225.	226.	227.	228.	229.	230.	
30.	329.	328.	327.	326.	325.	324.	323.	322.	321.	320.	319.	318.	317.	316.	315.	314.	313.	312.	311.	310.	
330.	4286	4240	4193	4145	4096	4045	3993	3940	3886	3830	3774	3716	3657	3597	3536	3473	3410	3346	3280	3214	90°
254	4211	4166	4120	4073	4024	3974	3923	3871	3818	3763	3708	3650	3593	3534	3474	3413	3351	3287	3224	3158	89
179	4137	4092	4047	4000	3952	3904	3854	3803	3750	3696	3642	3586	3530	3471	3412	3353	3291	3229	3166	3102	88
103	4062	4018	3974	3928	3881	3833	3784	3734	3682	3629	3576	3521	3466	3408	3350	3292	3232	3170	3109	3046	87
28	3987	3944	3901	3855	3809	3763	3714	3665	3614	3563	3510	3456	3402	3345	3289	3231	3172	3112	3052	2990	86
52	3913	3870	3828	3784	3738	3692	3645	3597	3547	3496	3445	3391	3339	3283	3227	3171	3113	3054	2995	2934	85
77	3838	3797	3755	3712	3667	3622	3575	3528	3479	3429	3379	3327	3275	3221	3166	3111	3054	2996	2938	2878	84
802	3-63	3723	3682	3640	3596	3552	3506	3460	3412	3363	3313	3262	3211	3158	3104	3050	2994	2938	2881	2822	83
727	3690	3650	3610	3568	3525	3482	3437	3392	3341	3297	3248	3198	3148	3096	3043	2990	2935	2880	2824	2767	82
652	3616	3577	3537	3496	3454	3412	3368	3323	3277	3231	3183	3134	3085	3034	2982	2930	2877	2822	2767	2711	81
578	3542	3504	3465	3425	3384	3344	3301	3256	3211	3165	3118	3070	3022	2972	2922	2871	2818	2764	2711	2656	80
504	3468	3431	3393	3354	3314	3273	3231	3188	3144	3099	3053	3006	2959	2910	2861	2811	2759	2707	2655	2601	79
430	3395	3358	3320	3282	3244	3204	3163	3121	3077	3034	2989	2943	2897	2849	2800	2752	2701	2650	2599	2546	78
356	3322	3286	3250	3212	3174	3135	3095	3054	3011	2968	2925	2880	2835	2787	2740	2692	2643	2593	2543	2491	77
282	3249	3214	3179	3142	3104	3066	3027	2987	2945	2903	2861	2817	2773	2727	2680	2633	2585	2536	2487	2437	76
209	3183	3148	3113	3077	3040	3002	2965	2929	2889	2850	2811	2771	2731	2690	2650	2610	2570	2527	2487	2432	75
136	3105	3071	3038	3002	2966	2930	2892	2854	2814	2774	2733	2691	2649	2605	2561	2516	2470	2423	2377	2328	74
64	3033	3000	2968	2933	2898	2862	2825	2788	2749	2710	2670	2629	2588	2545	2502	2458	2413	2367	2322	2274	73
992	2962	2929	2898	2864	2838	2805	2775	2742	2708	2674	2640	2607	2572	2537	2502	2468	2432	2396	2361	2321	72
920	2891	2859	2828	2795	2762	2728	2693	2657	2620	2583	2545	2507	2467	2425	2384	2343	2300	2256	2213	2168	71
849	2820	2790	2760	2727	2695	2661	2627	2592	2556	2520	2483	2445	2407	2374	2346	2286	2244	2201	2159	2115	70
778	2750	2720	2691	2659	2627	2595	2562	2528	2493	2457	2421	2384	2347	2307	2268	2229	2188	2146	2105	2062	69
708	2680	2651	2623	2592	2561	2530	2497	2464	2430	2395	2360	2325	2287	2249	2211	2173	2133	2092	2052	2010	68
638	2611	2582	2553	2525	2495	2465	2432	2400	2367	2333	2299	2263	2228	2191	2154	2117	2078	2038	1999	1958	67
569	2543	2515	2488	2459	2429	2400	2369	2337	2305	2272	2239	2204	2170	2133	2097	2061	2023	1985	1947	1907	66
500	2475	2448	2421	2393	2364	2335	2305	2275	2243	2211	2179	2145	2112	2076	2041	2006	1969	1932	1894	1856	65
432	2407	2381	2355	2328	2300	2273	2242	2213	2182	2151	2119	2086	2054	2020	1986	1951	1915	1879	1843	1805	64
364	2340	2315	2290	2263	2236	2210	2180	2151	2121	2091	2060	2028	1997	1964	1930	1897	1862	1827	1791	1755	63
297	2274	2249	2225	2199	2172	2147	2118	2090	2061	2031	2002	1971	1940	1908	1875	1843	1809	1775	1741	1705	62
231	2208	2184	2161	2136	2110	2084	2057	2030	2001	1972	1944	1914	1884	1853	1821	1790	1757	1724	1690	1656	61
165	2143	2120	2097	2072	2047	2022	1996	1970	1942	1915	1887	1857	1829	1798	1768	1737	1705	1673	1641	1607	60
135	2015	1993	1971	1948	1925	1901	1877	1852	1826	1800	1774	1746	1719	1690	1662	1633	1603	1572	1542	1511	58
109	1889	1869	1849	1827	1805	1783	1760	1737	1713	1688	1663	1638	1612	1585	1558	1532	1503	1475	1447	1417	56
85	1767	1747	1729	1708	1688	1667	1646	1624	1601	1579	1555	1531	1507	1482	1457	1432	1406	1379	1353	1325	54
564	1648	1629	1612	1593	1574	1554	1534	1514	1493	1472	1450	1428	1404	1382	1359	1335	1311	1286	1261	1235	52
496	1531	1514	1498	1480	1463	1445	1426	1407	1387	1368	1348	1327	1307	1284	1263	1241	1218	1195	1172	1148	50
432	1418	1402	1388	1371	1355	1338	1321	1304	1285	1267	1248	1229	1210	1190	1170	1150	1128	1107	1086	1063	48
362	1309	1294	1281	1265	1250	1235	1219	1203	1186	1169	1152	1134	1117	1098	1079	1061	1041	1021	1002	981	46
295	1203	1189	1177	1163	1149	1135	1120	1106	1090	1074	1059	1042	1027	1009	992	975	957	939	921	902	44
229	1101	1089	1077	1064	1052	1039	1025	1012	998	983	969	954	940	924	908	893	876	859	843	826	42
163	1003	991	979	966	958	946	934	922	908	896	883	869	856	841	827	813	798	782	768	752	40
118	909	896	884	871	858	846	833	820	806	793	780	767	753	739	725	711	696	681	667	651	38
77	819	806	794	781	768	755	742	729	715	702	689	675	662	648	634	620	605	591	576	561	36
40	724	711	698	685	672	659	646	633	620	606	593	579	566	552	538	524	510	495	481	466	34
58	632	619	606	593	580	567	554	541	528	515	502	489	475	462	448	434	420	406	392	377	32
80	535	522	509	496	483	470	457	444	431	418	405	392	379	365	352	338	324	310	296	282	30
7	440	427	414	401	388	375	362	349	336	323	310	297	284	271	258	244	230	216	202	188	28
38	344	331	318	305	292	279	266	253	240	227	214	201	188	175	162	149	135	121	107	93	26
71	249	236	223	210	197	184	171	158	145	132	119	106	93	80	67	54	41	28	15	1	24
15	154	141	128	115	102	89	76	63	50	37	24	11	-2	-15	-32	-49	-66	-83	-100	-117	22
61	59	46	33	20	7	-6	-19	-36	-53	-70	-87	-104	-121	-138	-155	-172	-189	-206	-223	-240	20
12	10	-3	-16	-29	-42	-55	-68	-81	-94	-107	-120	-133	-146	-159	-172	-185	-198	-211	-224	-237	18
68	106	93	80	67	54	41	28	15	2	-9	-22	-35	-48	-61	-74	-87	-100	-113	-126	-1396</	

us en bas et à droite; le signe est celui de $\cos(\alpha + \beta)$.

TABLE I (voir p. 23). — VALEUR DE LA FONCTION $f(\alpha, \beta, i) = \cos \alpha \cos \beta$

		Valeur de F (α - β), en dix-millièmes. — Les arguments doivent être en degrés.																				
α - β	Signe de F	50°	51°	52°	53°	54°	55°	56°	57°	58°	59°	60°	61°	62°	63°	64°	65°	66°	67°	68°	69°	70°
		130.	129.	128.	127.	126.	125.	124.	123.	122.	121.	120.	119.	118.	117.	116.	115.	114.	113.	112.	111.	110.
+	+	310.	309.	308.	307.	306.	305.	304.	303.	302.	301.	300.	299.	298.	297.	296.	295.	294.	293.	292.	291.	290.
i = 90°		3214	3147	3078	3009	2939	2868	2796	2723	2650	2575	2500	2424	2347	2270	2192	2113	2034	1954	1873	1792	1710
91		3158	3092	3025	2956	2888	2818	2747	2675	2603	2530	2456	2382	2307	2230	2154	2076	1998	1919	1840	1761	1680
92		3102	3037	2971	2904	2837	2768	2699	2628	2557	2485	2413	2339	2266	2191	2116	2039	1962	1885	1808	1730	1650
93		3046	2982	2918	2851	2783	2718	2650	2580	2511	2440	2369	2297	2225	2151	2077	2002	1927	1849	1775	1698	1622
94		2990	2927	2864	2799	2734	2668	2601	2535	2465	2395	2325	2255	2184	2112	2039	1965	1891	1817	1742	1667	1594
95		2934	2872	2810	2747	2683	2618	2552	2486	2418	2350	2282	2213	2143	2072	2001	1929	1856	1783	1710	1636	1564
96		2878	2818	2757	2694	2632	2568	2504	2438	2372	2306	2238	2171	2102	2033	1963	1892	1821	1749	1677	1605	1531
97		2822	2763	2703	2642	2581	2519	2455	2391	2326	2261	2195	2128	2062	1993	1925	1855	1786	1715	1645	1574	1504
98		2767	2708	2650	2590	2530	2469	2407	2344	2281	2216	2152	2087	2021	1954	1887	1819	1750	1681	1612	1543	1472
99		2711	2654	2597	2538	2479	2419	2359	2297	2235	2172	2109	2045	1980	1915	1849	1782	1715	1648	1580	1512	1442
100		2656	2600	2544	2486	2429	2370	2311	2250	2189	2128	2066	2003	1940	1876	1812	1746	1680	1614	1548	1481	1413
101		2601	2546	2491	2435	2378	2321	2262	2203	2144	2083	2023	1961	1900	1837	1774	1710	1645	1581	1515	1450	1384
102		2546	2492	2439	2383	2328	2272	2215	2157	2099	2039	1980	1920	1860	1798	1736	1674	1611	1547	1485	1420	1354
103		2491	2439	2386	2332	2278	2223	2167	2110	2053	1996	1937	1879	1820	1760	1699	1638	1576	1514	1452	1389	1325
104		2437	2385	2334	2281	2228	2174	2120	2064	2008	1952	1895	1838	1780	1721	1662	1602	1541	1481	1420	1359	1296
105		2382	2332	2282	2230	2178	2126	2072	2018	1964	1908	1853	1796	1740	1682	1625	1566	1507	1448	1388	1328	1267
106		2328	2279	2230	2179	2129	2078	2025	1972	1919	1865	1811	1756	1701	1644	1588	1530	1473	1415	1357	1298	1239
107		2274	2226	2179	2129	2080	2030	1979	1927	1875	1822	1769	1715	1661	1606	1551	1495	1439	1382	1325	1268	1210
108		2221	2174	2127	2079	2031	1982	1932	1881	1831	1779	1727	1675	1622	1569	1515	1460	1405	1350	1294	1238	1182
109		2168	2122	2076	2029	1982	1934	1886	1836	1787	1736	1686	1635	1583	1531	1479	1426	1371	1317	1263	1209	1153
110		2115	2070	2026	1980	1934	1887	1840	1791	1743	1694	1645	1595	1545	1494	1443	1390	1338	1285	1232	1179	1125
111		2062	2019	1976	1931	1886	1840	1794	1747	1700	1652	1604	1555	1506	1457	1407	1356	1305	1253	1201	1150	1097
112		2010	1968	1926	1882	1838	1794	1749	1703	1657	1610	1563	1516	1468	1420	1371	1321	1272	1223	1171	1121	1069
113		1958	1917	1876	1833	1791	1747	1704	1659	1614	1569	1523	1477	1430	1383	1336	1287	1239	1190	1141	1092	1041
114		1907	1867	1827	1785	1744	1702	1659	1615	1572	1527	1483	1438	1393	1347	1302	1253	1206	1159	1111	1063	1014
115		1856	1817	1778	1737	1697	1656	1614	1572	1530	1486	1443	1399	1356	1311	1267	1220	1174	1128	1081	1035	987
116		1805	1767	1729	1690	1651	1611	1570	1529	1488	1446	1404	1361	1319	1275	1231	1187	1142	1097	1052	1007	960
117		1755	1718	1681	1643	1605	1566	1526	1486	1446	1406	1365	1323	1282	1239	1197	1153	1110	1066	1023	977	931
118		1705	1669	1633	1596	1559	1522	1483	1444	1405	1366	1326	1286	1246	1204	1163	1121	1079	1036	994	951	907
119		1656	1621	1586	1550	1514	1478	1440	1403	1365	1326	1288	1249	1210	1170	1129	1088	1047	1006	965	923	881
120		1607	1573	1540	1504	1470	1434	1398	1361	1325	1287	1250	1212	1174	1135	1096	1056	1016	977	936	896	854
122		1511	1479	1447	1414	1382	1348	1314	1280	1245	1210	1175	1139	1104	1067	1031	995	958	923	886	849	812
124		1417	1387	1357	1326	1296	1264	1233	1200	1168	1135	1102	1069	1035	1001	967	933	898	865	830	795	760
126		1325	1297	1269	1240	1212	1182	1153	1122	1092	1061	1030	999	968	936	904	871	838	805	772	739	705
128		1235	1209	1184	1156	1130	1102	1075	1046	1018	989	961	933	905	877	849	821	793	765	737	709	681
130		1148	1124	1100	1075	1050	1025	999	972	946	919	893	866	839	811	783	755	726	697	669	641	613
132		1063	1041	1019	995	973	949	925	901	876	852	827	802	777	751	725	699	673	646	620	593	566
134		981	961	940	919	897	875	853	831	809	786	763	740	717	693	669	645	621	596	572	547	522
136		900	883	864	844	825	805	785	764	743	722	701	680	659	637	615	593	570	548	526	503	480
138		826	808	791	773	755	737	718	699	680	661	642	623	603	583	563	543	522	501	481	461	440
140		752	736	720	704	688	671	654	637	620	602	585	567	549	531	513	494	475	455	438	419	400
142		681	667	653	638	623	608	593	577	561	546	530	514	498	481	465	448	431	414	397	380	363
144		614	601	588	574	561	548	534	520	506	491	477	463	448	433	419	403	388	373	358	342	326
146		549	538	527	514	502	490	478	465	453	440	427	414	401	388	375	361	347	334	320	307	293
148		488	478	468	457	447	436	425	413	402	391	380	368	357	345	333	321	309	297	285	273	260
150		431	421	413	403	394	385	375	364	355	345	335	325	315	304	294	283	272	261	251	240	229
152		376	368	361	352	344	336	327	318	310	301	292	284	275	266	257	247	238	228	219	210	200
154		326	318	312	305	298	291	283	275	268	262	253	245	238	230	222	214	206	197	189	181	172
156		278	272	267	260	254	248	242	235	229	222	216	210	203	196	190	183	176	169	162	155	148
158		234	229	224	219	214	209	204	198	193	187	182	176	171								

$\alpha \sin \beta \cos i$. [On a $f(\alpha, \beta, i) = F(\alpha - \beta) + G(\alpha + \beta)$.]

lus en haut et à gauche; le signe est celui de $\cos(\alpha - \beta)$.

71°	72°	73°	74°	75°	76°	77°	78°	79°	80°	81°	82°	83°	84°	85°	86°	87°	88°	89°	90°
09.	108.	107.	106.	105.	104.	103.	102.	101.	100.	99.	98.	97.	96.	95.	94.	93.	92.	91.	90.
51.	252.	253.	254.	255.	256.	257.	258.	259.	260.	261.	262.	263.	264.	265.	266.	267.	268.	269.	270.
49.	288.	287.	286.	285.	284.	283.	282.	281.	280.	279.	278.	277.	276.	275.	274.	273.	272.	271.	270.
628	1545	1462	13-8	1294	1210	1125	1040	0954	0868	0782	0696	0609	0523	0436	0349	0262	0175	0087	0
600	1518	1437	1354	1272	1188	1106	1021	0937	0853	0768	0684	0599	0513	0429	0343	0257	0172	0085	0
571	1491	1411	1330	1249	1167	1086	1003	0921	0837	0755	0672	0588	0504	0421	0337	0252	0168	0085	0
543	1464	1386	1306	1226	1146	1066	0985	0904	0822	0741	0660	0578	0495	0413	0331	0248	0165	0083	0
515	1437	1360	1282	1204	1125	1047	0967	0887	0807	0727	0648	0567	0486	0406	0325	0243	0163	0082	0
486	1410	1335	1258	1181	1104	1027	0949	0871	0792	0714	0635	0556	0479	0398	0319	0239	0159	0080	0
458	1383	1309	1234	1159	1083	1008	0931	0854	0777	0700	0623	0546	0468	0391	0313	0234	0156	0079	0
430	1357	1284	1210	1136	1062	0988	0913	0838	0762	0686	0611	0535	0459	0383	0307	0229	0153	0077	0
402	1330	1259	1186	1114	1041	0969	0895	0821	0747	0673	0599	0525	0449	0376	0301	0225	0150	0076	0
373	1303	1233	1162	1091	1020	0949	0877	0805	0732	0659	0587	0514	0441	0368	0295	0220	0147	0074	0
346	1277	1208	1139	1069	0999	0930	0859	0788	0717	0646	0575	0504	0432	0361	0289	0216	0144	0073	0
318	1250	1183	1115	1047	0979	0911	0841	0772	0702	0633	0563	0493	0423	0353	0283	0211	0141	0071	0
290	1224	1158	1090	1023	0958	0891	0823	0756	0687	0619	0552	0483	0414	0346	0277	0207	0138	0070	0
262	1197	1133	1068	1003	0937	0872	0806	0739	0672	0606	0540	0472	0405	0338	0271	0202	0135	0068	0
234	1171	1108	1044	0982	0917	0853	0788	0723	0658	0593	0528	0462	0396	0331	0265	0198	0132	0067	0
207	1145	1084	1021	0959	0896	0834	0770	0707	0643	0579	0516	0452	0387	0323	0259	0194	0129	0065	0
179	1119	1059	0998	0937	0876	0815	0753	0691	0628	0566	0504	0442	0378	0316	0253	0189	0126	0064	0
152	1093	1035	0975	0916	0856	0796	0735	0675	0614	0553	0493	0431	0369	0309	0247	0185	0123	0062	0
125	1067	1010	0952	0894	0836	0778	0718	0659	0599	0540	0481	0421	0361	0302	0241	0180	0121	0061	0
98	1042	0986	0929	0873	0815	0759	0701	0643	0585	0527	0470	0411	0352	0294	0236	0176	0118	0059	0
71	1017	0962	0906	0851	0796	0741	0684	0628	0571	0514	0458	0401	0343	0287	0230	0172	0115	0058	0
44	0991	0938	0884	0830	0776	0722	0667	0612	0557	0501	0448	0391	0334	0280	0224	0167	0112	0056	0
18	0966	0915	0862	0809	0756	0704	0650	0597	0543	0489	0435	0381	0326	0273	0219	0163	0109	0055	0
92	0941	0891	0839	0788	0736	0686	0633	0581	0529	0476	0424	0371	0318	0266	0213	0159	0106	0053	0
66	0916	0868	0817	0767	0717	0668	0617	0566	0515	0464	0413	0362	0310	0259	0207	0155	0104	0052	0
40	0892	0844	0795	0747	0698	0650	0600	0551	0501	0453	0402	0352	0301	0252	0201	0151	0101	0051	0
15	0868	0821	0774	0727	0679	0632	0584	0536	0487	0439	0391	0343	0293	0245	0196	0147	0098	0050	0
89	0844	0799	0752	0706	0660	0614	0567	0521	0473	0427	0380	0333	0285	0238	0190	0142	0095	0048	0
64	0820	0776	0731	0686	0641	0597	0551	0506	0460	0415	0369	0324	0277	0232	0185	0138	0093	0047	0
39	0796	0753	0710	0666	0623	0580	0535	0491	0447	0403	0358	0314	0269	0225	0180	0134	0090	0045	0
14	0772	0731	0689	0647	0605	0563	0520	0477	0434	0391	0348	0305	0261	0218	0175	0130	0087	0044	0
66	0726	0687	0647	0608	0568	0529	0489	0448	0408	0367	0327	0287	0245	0205	0164	0123	0082	0041	0
41	0681	0645	0607	0570	0533	0496	0458	0420	0382	0344	0307	0269	0230	0192	0154	0115	0077	0039	0
17	0637	0603	0568	0533	0498	0464	0428	0393	0357	0322	0287	0251	0215	0180	0144	0107	0072	0036	0
26	0594	0562	0529	0497	0465	0433	0399	0367	0333	0300	0268	0234	0200	0168	0134	0100	0067	0034	0
82	0552	0522	0492	0462	0432	0402	0371	0341	0310	0279	0249	0218	0186	0156	0125	0093	0062	0032	0
39	0511	0484	0456	0428	0400	0373	0344	0316	0287	0258	0229	0199	0173	0144	0116	0086	0058	0029	0
97	0472	0447	0420	0395	0369	0344	0317	0291	0265	0238	0213	0186	0159	0133	0107	0079	0053	0027	0
57	0432	0410	0386	0363	0339	0316	0292	0268	0243	0219	0196	0171	0146	0123	0098	0073	0049	0025	0
18	0397	0376	0354	0332	0310	0289	0267	0245	0223	0201	0179	0157	0134	0112	0090	0067	0045	0023	0
81	0361	0342	0322	0302	0283	0264	0243	0223	0203	0183	0163	0143	0122	0102	0082	0061	0041	0021	0
45	0327	0310	0292	0274	0256	0239	0220	0202	0184	0165	0148	0129	0110	0093	0074	0055	0037	0019	0
11	0295	0279	0263	0247	0231	0215	0198	0182	0165	0149	0133	0117	0099	0084	0067	0050	0033	0017	0
79	0264	0250	0235	0221	0207	0193	0178	0163	0148	0133	0119	0104	0089	0075	0060	0044	0030	0015	0
48	0235	0222	0209	0196	0183	0171	0158	0145	0131	0119	0106	0093	0079	0067	0053	0039	0027	0014	0
18	0207	0195	0184	0173	0162	0151	0139	0128	0116	0104	0093	0082	0070	0059	0047	0035	0023	0012	0
91	0181	0171	0161	0151	0141	0132	0122	0112	0101	0091	0081	0072	0061	0051	0041	0030	0020	0011	0
65	0156	0148	0139	0131	0122	0114	0105	0097	0087	0079	0071	0062	0052	0045	0036	0026	0018	0009	0
41	0133	0125	0119	0112	0104	0098	0090	0082	0075	0067	0060	0053	0045	0038	0031	0022	0015	0008	0
19	0112	0107	0100	0094	0088	0082	0076	0069	0063	0057	0051	0045	0038	0032	0026	0019	0013	0007	0
98	0093	0088	0083	0078	0073	0068	0063	0057	0052	0047	0042	0037	0031	0027	0021	0015	0011	0006	0
80	0075	0072	0067	0063	0059	0056	0051	0047	0042	0038	0034	0030	0025	0022	0016	0012	0009	0005	0
65	0060	0057	0053	0050	0047	0044	0040	0037	0033	0030	0027	0024	0020	0017	0014	0010	0007	0004	0
49	0046	0044	0041	0038	0037	0034	0031	0028	0025	0023	0021	0018	0015	0013	0011	0009	0005	0003	0
36	0034	0032	0030	0028	0026	0025	0023	0021	0019	0017	0015	0014	0011	0010	0009	0005	0004	0002	0
25	0023	0023	0021	0019	0018	0017	0016	0014	0013	0012	0011	0010	0008	0007	0006	0004	0003	0002	0

TABLE II (*voir* p. 16). — EXPRESSION NUMÉRIQUE DES COEFFICIENTS QUI FIGURENT DANS $\Delta_1(e)$:

$$\Delta_1(e) = a_0 A_0 + b_0 B_0 + c_0 C_0 + d_0 D_0 + a'_0 A'_0 + b'_0 B'_0 + c'_0 C'_0 + d'_0 D'_0.$$

q .	a_0 .	b_0 .	c_0 .	d_0 .	a'_0 .	b'_0 .	c'_0 .	d'_0 .
0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	+0,00	0,00
01	— 0,56	— 0,07	+ 0,97	+ 0,04	— 0,04	— 0,01	0,06	0,00
02	1,12	0,18	1,95	0,11	0,08	0,02	0,12	+0,01
03	1,67	0,33	2,92	0,20	0,11	0,03	0,18	0,01
04	2,21	0,51	3,90	0,31	0,14	0,04	0,24	0,02
0,05	2,75	0,73	4,88	0,43	0,17	0,06	0,30	0,03
06	3,28	0,96	5,86	0,56	0,20	0,08	0,36	0,04
07	3,81	1,21	6,84	0,70	0,23	0,10	0,42	0,05
08	4,33	1,48	7,82	0,86	0,26	0,12	0,48	0,06
09	4,84	1,76	8,80	1,03	0,29	0,14	0,54	0,07
0,10	5,35	2,05	9,77	1,22	0,32	0,16	0,59	0,09
11	5,85	2,36	10,75	1,42	0,35	0,18	0,65	0,10
12	6,35	2,68	11,73	1,63	0,38	0,20	0,71	0,12
13	6,84	3,02	12,70	1,84	0,41	0,22	0,77	0,14
14	7,33	3,37	13,67	2,05	0,43	0,25	0,83	0,16
0,15	7,81	3,73	14,64	2,27	0,45	0,28	0,89	0,18
16	8,29	4,10	15,61	2,50	0,48	0,31	0,95	0,19
17	8,76	4,48	16,58	2,74	0,50	0,34	1,01	0,21
18	9,23	4,88	17,55	2,99	0,53	0,37	1,07	0,23
19	9,69	5,28	18,53	3,25	0,56	0,40	1,13	0,25
0,20	10,14	5,69	19,51	3,52	0,58	0,43	1,18	0,27
21	10,59	6,10	20,48	3,79	0,61	0,46	1,24	0,29
22	11,04	6,53	21,45	4,07	0,63	0,49	1,30	0,31
23	11,48	6,96	22,42	4,36	0,65	0,52	1,36	0,34
24	11,91	7,41	23,39	4,65	0,67	0,55	1,42	0,36
0,25	12,33	7,87	24,36	4,95	0,69	0,59	1,48	0,39
26	12,75	8,33	25,33	5,26	0,71	0,62	1,54	0,41
27	13,17	8,80	26,30	5,57	0,73	0,65	1,60	0,44
28	13,58	9,27	27,27	5,89	0,75	0,68	1,66	0,46
29	13,98	9,75	28,24	6,22	0,77	0,72	1,72	0,49
0,30	14,37	10,24	29,21	6,56	0,79	0,76	1,77	0,51
31	14,77	10,73	30,18	6,90	0,81	0,79	1,83	0,54
32	15,16	11,23	31,15	7,24	0,83	0,82	1,89	0,56
33	15,54	11,74	32,11	7,59	0,84	0,86	1,95	0,59
34	15,91	12,27	33,07	7,95	0,86	0,90	2,00	0,62
0,35	16,28	12,80	34,03	8,32	0,87	0,94	2,05	0,65
36	16,65	13,33	35,00	8,69	0,89	0,98	2,11	0,68
37	17,02	13,86	35,96	9,07	0,90	1,02	2,16	0,71
38	17,38	14,40	36,92	9,45	0,92	1,05	2,22	0,74
39	17,74	14,94	37,88	9,84	0,94	1,09	2,28	0,77
0,40	18,07	15,49	38,84	10,24	0,95	1,13	2,34	0,81
41	18,41	16,04	39,80	10,64	0,97	1,17	2,39	0,84
42	18,75	15,60	40,76	11,05	0,98	1,21	2,45	0,87
43	19,08	17,16	41,72	11,46	0,99	1,25	2,51	0,90
44	19,40	17,73	42,67	11,88	1,00	1,29	2,57	0,94
0,45	19,72	18,31	43,62	12,29	1,01	1,33	2,62	0,97
46	20,03	18,89	44,58	12,71	1,02	1,37	2,68	1,01
47	20,34	19,48	45,53	13,14	1,03	1,41	2,74	1,04
48	20,65	20,06	46,48	13,58	1,04	1,45	2,79	1,07
49	20,95	20,65	47,43	14,03	1,05	1,49	2,85	1,11
0,50	—21,25	—21,24	+48,38	+14,49	—1,06	—1,54	+2,90	+1,15

TABLE II (suite). — EXPRESSION NUMÉRIQUE DES COEFFICIENTS QUI FIGURENT DANS $\Delta_1(e)$:

$$\Delta_1(e) = a_0 A_0 + b_0 B_0 + c_0 C_0 + d_0 D_0 + a'_0 A'_0 + b'_0 B'_0 + c'_0 C'_0 + d'_0 D'_0.$$

q .	$\text{Log } a$.	$\text{Log } b_0$.	$\text{Log } c_0$.	$\text{Log } d_0$.	$\text{Log } a'_0$.	$\text{Log } b'_0$.	$\text{Log } c'_0$.	$\text{Log } d'_0$.
0,50	1,3274 <i>n</i>	1,3272 <i>n</i>	1,6847	1,1611	0,026 <i>n</i>	0,186 <i>n</i>	0,463	0,059
51	1,3333 <i>n</i>	1,3392 <i>n</i>	1,6931	1,1746	0,030 <i>n</i>	0,197 <i>n</i>	0,471	0,073
52	1,3391 <i>n</i>	1,3510 <i>n</i>	1,7014	1,1881	0,034 <i>n</i>	0,208 <i>n</i>	0,479	0,086
53	1,3446 <i>n</i>	1,3626 <i>n</i>	1,7095	1,2011	0,037 <i>n</i>	0,219 <i>n</i>	0,487	0,099
54	1,3499 <i>n</i>	1,3738 <i>n</i>	1,7175	1,2135	0,040 <i>n</i>	0,230 <i>n</i>	0,494	0,112
0,55	1,3549 <i>n</i>	1,3849 <i>n</i>	1,7253	1,2258	0,043 <i>n</i>	0,241 <i>n</i>	0,502	0,125
56	1,3598 <i>n</i>	1,3957 <i>n</i>	1,7329	1,2381	0,045 <i>n</i>	0,251 <i>n</i>	0,510	0,137
57	1,3647 <i>n</i>	1,4064 <i>n</i>	1,7404	1,2502	0,047 <i>n</i>	0,261 <i>n</i>	0,517	0,149
58	1,3694 <i>n</i>	1,4168 <i>n</i>	1,7477	1,2620	0,049 <i>n</i>	0,271 <i>n</i>	0,524	0,161
59	1,3740 <i>n</i>	1,4272 <i>n</i>	1,7550	1,2735	0,051 <i>n</i>	0,281 <i>n</i>	0,531	0,173
0,60	1,3786 <i>n</i>	1,4374 <i>n</i>	1,7622	1,2849	0,053 <i>n</i>	0,291 <i>n</i>	0,538	0,185
61	1,3829 <i>n</i>	1,4475 <i>n</i>	1,7692	1,2962	0,055 <i>n</i>	0,300 <i>n</i>	0,545	0,196
62	1,3870 <i>n</i>	1,4573 <i>n</i>	1,7761	1,3073	0,057 <i>n</i>	0,309 <i>n</i>	0,552	0,207
63	1,3911 <i>n</i>	1,4669 <i>n</i>	1,7828	1,3183	0,059 <i>n</i>	0,318 <i>n</i>	0,558	0,218
64	1,3952 <i>n</i>	1,4763 <i>n</i>	1,7894	1,3290	0,060 <i>n</i>	0,327 <i>n</i>	0,564	0,229
0,65	1,3990 <i>n</i>	1,4854 <i>n</i>	1,7959	1,3397	0,061 <i>n</i>	0,336 <i>n</i>	0,570	0,240
66	1,4028 <i>n</i>	1,4946 <i>n</i>	1,8023	1,3501	0,062 <i>n</i>	0,344 <i>n</i>	0,576	0,250
67	1,4064 <i>n</i>	1,5035 <i>n</i>	1,8086	1,3604	0,063 <i>n</i>	0,352 <i>n</i>	0,582	0,260
68	1,4099 <i>n</i>	1,5123 <i>n</i>	1,8149	1,3705	0,063 <i>n</i>	0,361 <i>n</i>	0,588	0,270
69	1,4133 <i>n</i>	1,5209 <i>n</i>	1,8210	1,3804	0,064 <i>n</i>	0,369 <i>n</i>	0,594	0,280
0,70	1,4165 <i>n</i>	1,5294 <i>n</i>	1,8271	1,3902	0,064 <i>n</i>	0,377 <i>n</i>	0,600	0,290
71	1,4196 <i>n</i>	1,5378 <i>n</i>	1,8330	1,3999	0,064 <i>n</i>	0,385 <i>n</i>	0,606	0,300
72	1,4228 <i>n</i>	1,5461 <i>n</i>	1,8389	1,4094	0,064 <i>n</i>	0,393 <i>n</i>	0,611	0,309
73	1,4257 <i>n</i>	1,5541 <i>n</i>	1,8446	1,4190	0,064 <i>n</i>	0,401 <i>n</i>	0,616	0,319
74	1,4286 <i>n</i>	1,5621 <i>n</i>	1,8503	1,4283	0,064 <i>n</i>	0,408 <i>n</i>	0,622	0,328
0,75	1,4313 <i>n</i>	1,5700 <i>n</i>	1,8559	1,4374	0,064 <i>n</i>	0,415 <i>n</i>	0,627	0,338
76	1,4341 <i>n</i>	1,5777 <i>n</i>	1,8614	1,4465	0,063 <i>n</i>	0,422 <i>n</i>	0,632	0,347
77	1,4368 <i>n</i>	1,5854 <i>n</i>	1,8669	1,4556	0,063 <i>n</i>	0,429 <i>n</i>	0,637	0,356
78	1,4393 <i>n</i>	1,5928 <i>n</i>	1,8722	1,4645	0,062 <i>n</i>	0,435 <i>n</i>	0,642	0,365
79	1,4417 <i>n</i>	1,6003 <i>n</i>	1,8775	1,4732	0,061 <i>n</i>	0,442 <i>n</i>	0,647	0,374
0,80	1,4439 <i>n</i>	1,6077 <i>n</i>	1,8827	1,4819	0,060 <i>n</i>	0,449 <i>n</i>	0,652	0,382
81	1,4461 <i>n</i>	1,6149 <i>n</i>	1,8878	1,4904	0,059 <i>n</i>	0,456 <i>n</i>	0,657	0,391
82	1,4482 <i>n</i>	1,6220 <i>n</i>	1,8929	1,4989	0,058 <i>n</i>	0,463 <i>n</i>	0,662	0,399
83	1,4504 <i>n</i>	1,6290 <i>n</i>	1,8979	1,5072	0,056 <i>n</i>	0,469 <i>n</i>	0,666	0,407
84	1,4524 <i>n</i>	1,6359 <i>n</i>	1,9028	1,5153	0,055 <i>n</i>	0,475 <i>n</i>	0,671	0,416
0,85	1,4544 <i>n</i>	1,6428 <i>n</i>	1,9078	1,5232	0,053 <i>n</i>	0,481 <i>n</i>	0,676	0,424
86	1,4562 <i>n</i>	1,6495 <i>n</i>	1,9126	1,5311	0,051 <i>n</i>	0,487 <i>n</i>	0,681	0,432
87	1,4580 <i>n</i>	1,6562 <i>n</i>	1,9174	1,5390	0,049 <i>n</i>	0,493 <i>n</i>	0,685	0,440
88	1,4597 <i>n</i>	1,6628 <i>n</i>	1,9221	1,5468	0,047 <i>n</i>	0,499 <i>n</i>	0,689	0,448
89	1,4614 <i>n</i>	1,6692 <i>n</i>	1,9267	1,5546	0,045 <i>n</i>	0,505 <i>n</i>	0,693	0,456
0,90	1,4630 <i>n</i>	1,6756 <i>n</i>	1,9313	1,5624	0,042 <i>n</i>	0,511 <i>n</i>	0,697	0,463
91	1,4645 <i>n</i>	1,6819 <i>n</i>	1,9358	1,5701	0,039 <i>n</i>	0,517 <i>n</i>	0,701	0,470
92	1,4660 <i>n</i>	1,6882 <i>n</i>	1,9403	1,5776	0,036 <i>n</i>	0,523 <i>n</i>	0,705	0,478
93	1,4673 <i>n</i>	1,6943 <i>n</i>	1,9447	1,5850	0,033 <i>n</i>	0,529 <i>n</i>	0,709	0,485
94	1,4686 <i>n</i>	1,7004 <i>n</i>	1,9491	1,5923	0,030 <i>n</i>	0,534 <i>n</i>	0,713	0,493
0,95	1,4698 <i>n</i>	1,7065 <i>n</i>	1,9534	1,5996	0,027 <i>n</i>	0,539 <i>n</i>	0,717	0,500
96	1,4710 <i>n</i>	1,7124 <i>n</i>	1,9577	1,6067	0,024 <i>n</i>	0,545 <i>n</i>	0,721	0,507
97	1,4720 <i>n</i>	1,7182 <i>n</i>	1,9619	1,6138	0,021 <i>n</i>	0,550 <i>n</i>	0,725	0,514
98	1,4731 <i>n</i>	1,7239 <i>n</i>	1,9660	1,6209	0,017 <i>n</i>	0,555 <i>n</i>	0,729	0,521
99	1,4741 <i>n</i>	1,7296 <i>n</i>	1,9701	1,6279	0,013 <i>n</i>	0,560 <i>n</i>	0,733	0,528
1,00	1,4749 <i>n</i>	1,7353 <i>n</i>	1,9742	1,6348	0,009 <i>n</i>	0,565 <i>n</i>	0,736	0,535

L'unité est la seconde d'arc.

TABLE II (suite). — EXPRESSION NUMÉRIQUE DES COEFFICIENTS QUI FIGURENT DANS $\Delta_1(e)$:

$$\Delta_1(e) = a_0 A_0 + b_0 B_0 + c_0 C_0 + d_0 D_0 + a'_0 A'_0 + b'_0 B'_0 + c'_0 C'_0 + d'_0 D'_0.$$

q .	$\text{Log } a_0$.	$\text{Log } b_0$.	$\text{Log } c_0$.	$\text{Log } d_0$.	$\text{Log } a'_0$.	$\text{Log } b'_0$.	$\text{Log } c'_0$.	$\text{Log } d'_0$.
1,00	1,4749 <i>n</i>	1,7353 <i>n</i>	1,9742	1,6348	0,009 <i>n</i>	0,565 <i>n</i>	0,736	0,535
01	1,4758 <i>n</i>	1,7408 <i>n</i>	1,9782	1,6417	0,005 <i>n</i>	0,570 <i>n</i>	0,740	0,542
02	1,4765 <i>n</i>	1,7464 <i>n</i>	1,9822	1,6486	0,001 <i>n</i>	0,575 <i>n</i>	0,744	0,549
03	1,4773 <i>n</i>	1,7519 <i>n</i>	1,9861	1,6553	9,996 <i>n</i>	0,580 <i>n</i>	0,748	0,556
04	1,4778 <i>n</i>	1,7572 <i>n</i>	1,9900	1,6618	9,991 <i>n</i>	0,585 <i>n</i>	0,751	0,562
1,05	1,4784 <i>n</i>	1,7626 <i>n</i>	1,9938	1,6684	9,986 <i>n</i>	0,589 <i>n</i>	0,754	0,568
06	1,4790 <i>n</i>	1,7679 <i>n</i>	1,9977	1,6750	9,981 <i>n</i>	0,594 <i>n</i>	0,758	0,575
07	1,4794 <i>n</i>	1,7731 <i>n</i>	2,0014	1,6814	9,976 <i>n</i>	0,599 <i>n</i>	0,761	0,581
08	1,4799 <i>n</i>	1,7783 <i>n</i>	2,0051	1,6878	9,970 <i>n</i>	0,603 <i>n</i>	0,764	0,588
09	1,4803 <i>n</i>	1,7833 <i>n</i>	2,0088	1,6941	9,964 <i>n</i>	0,607 <i>n</i>	0,767	0,594
1,10	1,4806 <i>n</i>	1,7884 <i>n</i>	2,0124	1,7004	9,958 <i>n</i>	0,611 <i>n</i>	0,770	0,600
11	1,4807 <i>n</i>	1,7934 <i>n</i>	2,0161	1,7065	9,952 <i>n</i>	0,616 <i>n</i>	0,774	0,606
12	1,4809 <i>n</i>	1,7983 <i>n</i>	2,0196	1,7126	9,946 <i>n</i>	0,620 <i>n</i>	0,777	0,612
13	1,4809 <i>n</i>	1,8032 <i>n</i>	2,0231	1,7187	9,940 <i>n</i>	0,624 <i>n</i>	0,780	0,618
14	1,4810 <i>n</i>	1,8080 <i>n</i>	2,0266	1,7248	9,933 <i>n</i>	0,628 <i>n</i>	0,783	0,624
1,15	1,4810 <i>n</i>	1,8129 <i>n</i>	2,0301	1,7309	9,926 <i>n</i>	0,632 <i>n</i>	0,786	0,630
16	1,4809 <i>n</i>	1,8176 <i>n</i>	2,0335	1,7369	9,918 <i>n</i>	0,636 <i>n</i>	0,789	0,636
17	1,4807 <i>n</i>	1,8222 <i>n</i>	2,0369	1,7428	9,910 <i>n</i>	0,640 <i>n</i>	0,792	0,642
18	1,4806 <i>n</i>	1,8269 <i>n</i>	2,0402	1,7487	9,902 <i>n</i>	0,644 <i>n</i>	0,795	0,648
19	1,4804 <i>n</i>	1,8314 <i>n</i>	2,0436	1,7544	9,894 <i>n</i>	0,648 <i>n</i>	0,798	0,654
1,20	1,4802 <i>n</i>	1,8359 <i>n</i>	2,0468	1,7602	9,886 <i>n</i>	0,652 <i>n</i>	0,801	0,659
21	1,4799 <i>n</i>	1,8404 <i>n</i>	2,0502	1,7659	9,877 <i>n</i>	0,656 <i>n</i>	0,804	0,665
22	1,4794 <i>n</i>	1,8448 <i>n</i>	2,0534	1,7716	9,868 <i>n</i>	0,660 <i>n</i>	0,807	0,670
23	1,4790 <i>n</i>	1,8492 <i>n</i>	2,0565	1,7772	9,858 <i>n</i>	0,664 <i>n</i>	0,809	0,676
24	1,4786 <i>n</i>	1,8535 <i>n</i>	2,0597	1,7828	9,848 <i>n</i>	0,668 <i>n</i>	0,812	0,681
1,25	1,4780 <i>n</i>	1,8578 <i>n</i>	2,0629	1,7882	9,838 <i>n</i>	0,671 <i>n</i>	0,814	0,686
26	1,4774 <i>n</i>	1,8621 <i>n</i>	2,0659	1,7937	9,827 <i>n</i>	0,675 <i>n</i>	0,817	0,692
27	1,4767 <i>n</i>	1,8663 <i>n</i>	2,0690	1,7991	9,816 <i>n</i>	0,678 <i>n</i>	0,819	0,698
28	1,4760 <i>n</i>	1,8705 <i>n</i>	2,0720	1,8046	9,804 <i>n</i>	0,682 <i>n</i>	0,822	0,703
29	1,4752 <i>n</i>	1,8746 <i>n</i>	2,0750	1,8098	9,792 <i>n</i>	0,685 <i>n</i>	0,825	0,708
1,30	1,4744 <i>n</i>	1,8788 <i>n</i>	2,0780	1,8151	9,780 <i>n</i>	0,688 <i>n</i>	0,827	0,713
31	1,4735 <i>n</i>	1,8828 <i>n</i>	2,0810	1,8204	9,767 <i>n</i>	0,692 <i>n</i>	0,830	0,718
32	1,4725 <i>n</i>	1,8868 <i>n</i>	2,0839	1,8256	9,753 <i>n</i>	0,695 <i>n</i>	0,832	0,723
33	1,4714 <i>n</i>	1,8908 <i>n</i>	2,0868	1,8308	9,739 <i>n</i>	0,698 <i>n</i>	0,835	0,728
34	1,4704 <i>n</i>	1,8947 <i>n</i>	2,0896	1,8359	9,724 <i>n</i>	0,701 <i>n</i>	0,837	0,733
1,35	1,4692 <i>n</i>	1,8986 <i>n</i>	2,0925	1,8411	9,708 <i>n</i>	0,704 <i>n</i>	0,839	0,738
36	1,4681 <i>n</i>	1,9025 <i>n</i>	2,0953	1,8461	9,689 <i>n</i>	0,708 <i>n</i>	0,842	0,743
37	1,4669 <i>n</i>	1,9063 <i>n</i>	2,0981	1,8511	9,672 <i>n</i>	0,711 <i>n</i>	0,844	0,748
38	1,4657 <i>n</i>	1,9101 <i>n</i>	2,1009	1,8561	9,654 <i>n</i>	0,714 <i>n</i>	0,847	0,753
39	1,4643 <i>n</i>	1,9139 <i>n</i>	2,1036	1,8611	9,636 <i>n</i>	0,717 <i>n</i>	0,849	0,758
1,40	1,4629 <i>n</i>	1,9176 <i>n</i>	2,1064	1,8660	9,617 <i>n</i>	0,720 <i>n</i>	0,851	0,762
41	1,4614 <i>n</i>	1,9213 <i>n</i>	2,1090	1,8709	9,597 <i>n</i>	0,723 <i>n</i>	0,853	0,767
42	1,4598 <i>n</i>	1,9250 <i>n</i>	2,1117	1,8758	9,575 <i>n</i>	0,726 <i>n</i>	0,855	0,772
43	1,4582 <i>n</i>	1,9286 <i>n</i>	2,1143	1,8806	9,551 <i>n</i>	0,729 <i>n</i>	0,857	0,777
44	1,4567 <i>n</i>	1,9322 <i>n</i>	2,1170	1,8853	9,523 <i>n</i>	0,732 <i>n</i>	0,859	0,781
1,45	1,4550 <i>n</i>	1,9357 <i>n</i>	2,1196	1,8900	9,493 <i>n</i>	0,735 <i>n</i>	0,861	0,785
46	1,4533 <i>n</i>	1,9392 <i>n</i>	2,1221	1,8947	9,461 <i>n</i>	0,738 <i>n</i>	0,863	0,790
47	1,4515 <i>n</i>	1,9427 <i>n</i>	2,1247	1,8994	9,426 <i>n</i>	0,741 <i>n</i>	0,865	0,794
48	1,4496 <i>n</i>	1,9462 <i>n</i>	2,1272	1,9040	9,389 <i>n</i>	0,743 <i>n</i>	0,867	0,799
49	1,4476 <i>n</i>	1,9496 <i>n</i>	2,1297	1,9087	9,350 <i>n</i>	0,745 <i>n</i>	0,869	0,803
1,50	1,4456 <i>n</i>	1,9530 <i>n</i>	2,1322	1,9132	9,310 <i>n</i>	0,748 <i>n</i>	0,871	0,807

L'unité est la seconde d'arc.

TABLE II (suite). — EXPRESSION NUMÉRIQUE DES COEFFICIENTS QUI FIGURENT DANS $\Delta_1(e)$:

$$\Delta_1(e) = a_0 A_0 + b_0 B_0 + c_0 C_0 + d_0 D_0 + a'_0 A'_0 + b'_0 B'_0 + c'_0 C'_0 + d'_0 D'_0.$$

q .	$\text{Log } a_0$.	$\text{Log } b_0$.	$\text{Log } c_0$.	$\text{Log } d_0$.	$\text{Log } a'_0$.	$\text{Log } b'_0$.	$\text{Log } c'_0$.	$\text{Log } d'_0$.
1,50	1,4456 <i>n</i>	1,9530 <i>n</i>	2,1322	1,9132	9,310 <i>n</i>	0,748 <i>n</i>	0,871	0,807
51	1,4436 <i>n</i>	1,9564 <i>n</i>	2,1348	1,9178	9,261 <i>n</i>	0,751 <i>n</i>	0,873	0,812
52	1,4414 <i>n</i>	1,9597 <i>n</i>	2,1372	1,9223	9,204 <i>n</i>	0,753 <i>n</i>	0,875	0,817
53	1,4392 <i>n</i>	1,9630 <i>n</i>	2,1396	1,9268	9,138 <i>n</i>	0,756 <i>n</i>	0,877	0,821
54	1,4369 <i>n</i>	1,9663 <i>n</i>	2,1420	1,9312	9,059 <i>n</i>	0,758 <i>n</i>	0,879	0,825
1,55	1,4347 <i>n</i>	1,9696 <i>n</i>	2,1444	1,9356	8,963 <i>n</i>	0,761 <i>n</i>	0,880	0,829
56	1,4322 <i>n</i>	1,9728 <i>n</i>	2,1467	1,9400	8,838 <i>n</i>	0,763 <i>n</i>	0,882	0,833
57	1,4298 <i>n</i>	1,9759 <i>n</i>	2,1490	1,9443	8,747 <i>n</i>	0,765 <i>n</i>	0,884	0,837
58	1,4273 <i>n</i>	1,9791 <i>n</i>	2,1513	1,9487	8,513 <i>n</i>	0,768 <i>n</i>	0,886	0,841
59	1,4249 <i>n</i>	1,9822 <i>n</i>	2,1536	1,9530	7,959 <i>n</i>	0,771 <i>n</i>	0,887	0,845
1,60	1,4222 <i>n</i>	1,9854 <i>n</i>	2,1560	1,9573	8,389	0,773 <i>n</i>	0,889	0,850
61	1,4196 <i>n</i>	1,9885 <i>n</i>	2,1582	1,9616	8,686	0,775 <i>n</i>	0,891	0,854
62	1,4168 <i>n</i>	1,9915 <i>n</i>	2,1604	1,9658	8,861	0,778 <i>n</i>	0,893	0,858
63	1,4140 <i>n</i>	1,9946 <i>n</i>	2,1626	1,9700	8,986	0,780 <i>n</i>	0,894	0,862
64	1,4110 <i>n</i>	1,9976 <i>n</i>	2,1648	1,9741	9,082	0,783 <i>n</i>	0,896	0,866
1,65	1,4079 <i>n</i>	2,0006 <i>n</i>	2,1671	1,9783	9,161	0,785 <i>n</i>	0,897	0,870
66	1,4048 <i>n</i>	2,0035 <i>n</i>	2,1693	1,9824	9,225	0,787 <i>n</i>	0,899	0,874
67	1,4017 <i>n</i>	2,0064 <i>n</i>	2,1715	1,9865	9,287	0,789 <i>n</i>	0,900	0,878
68	1,3985 <i>n</i>	2,0093 <i>n</i>	2,1736	1,9906	9,340	0,791 <i>n</i>	0,902	0,881
69	1,3953 <i>n</i>	2,0122 <i>n</i>	2,1757	1,9946	9,387	0,793 <i>n</i>	0,903	0,885
1,70	1,3920 <i>n</i>	2,0151 <i>n</i>	2,1778	1,9986	9,429	0,795 <i>n</i>	0,905	0,889
71	1,3885 <i>n</i>	2,0179 <i>n</i>	2,1799	2,0026	9,468	0,797 <i>n</i>	0,906	0,892
72	1,3849 <i>n</i>	2,0207 <i>n</i>	2,1820	2,0065	9,505	0,799 <i>n</i>	0,908	0,896
73	1,3813 <i>n</i>	2,0235 <i>n</i>	2,1841	2,0104	9,539	0,801 <i>n</i>	0,909	0,900
74	1,3775 <i>n</i>	2,0263 <i>n</i>	2,1861	2,0143	9,570	0,803 <i>n</i>	0,911	0,904
1,75	1,3737 <i>n</i>	2,0291 <i>n</i>	2,1881	2,0182	9,598	0,805 <i>n</i>	0,912	0,908
76	1,3698 <i>n</i>	2,0318 <i>n</i>	2,1901	2,0221	9,624	0,807 <i>n</i>	0,914	0,912
77	1,3659 <i>n</i>	2,0345 <i>n</i>	2,1921	2,0260	9,650	0,809 <i>n</i>	0,915	0,915
78	1,3619 <i>n</i>	2,0372 <i>n</i>	2,1940	2,0298	9,675	0,811 <i>n</i>	0,916	0,919
79	1,3577 <i>n</i>	2,0399 <i>n</i>	2,1959	2,0336	9,699	0,813 <i>n</i>	0,918	0,922
1,80	1,3535 <i>n</i>	2,0426 <i>n</i>	2,1979	2,0374	9,722	0,815 <i>n</i>	0,919	0,926
81	1,3493 <i>n</i>	2,0452 <i>n</i>	2,1998	2,0411	9,744	0,817 <i>n</i>	0,921	0,929
82	1,3450 <i>n</i>	2,0478 <i>n</i>	2,2017	2,0448	9,764	0,819 <i>n</i>	0,922	0,932
83	1,3404 <i>n</i>	2,0503 <i>n</i>	2,2036	2,0485	9,783	0,821 <i>n</i>	0,924	0,936
84	1,3357 <i>n</i>	2,0528 <i>n</i>	2,2054	2,0522	9,802	0,823 <i>n</i>	0,925	0,939
1,85	1,3308 <i>n</i>	2,0553 <i>n</i>	2,2073	2,0559	9,820	0,824 <i>n</i>	0,926	0,943
86	1,3259 <i>n</i>	2,0578 <i>n</i>	2,2091	2,0595	9,837	0,826 <i>n</i>	0,927	0,946
87	1,3209 <i>n</i>	2,0603 <i>n</i>	2,2109	2,0631	9,854	0,827 <i>n</i>	0,929	0,949
88	1,3158 <i>n</i>	2,0628 <i>n</i>	2,2127	2,0667	9,870	0,829 <i>n</i>	0,930	0,953
89	1,3105 <i>n</i>	2,0652 <i>n</i>	2,2146	2,0703	9,886	0,831 <i>n</i>	0,931	0,956
1,90	1,3051 <i>n</i>	2,0677 <i>n</i>	2,2164	2,0739	9,901	0,833 <i>n</i>	0,932	0,960
91	1,2997 <i>n</i>	2,0701 <i>n</i>	2,2182	2,0774	9,916	0,835 <i>n</i>	0,933	0,963
92	1,2943 <i>n</i>	2,0725 <i>n</i>	2,2199	2,0809	9,931	0,837 <i>n</i>	0,934	0,966
93	1,2885 <i>n</i>	2,0749 <i>n</i>	2,2217	2,0844	9,945	0,838 <i>n</i>	0,935	0,970
94	1,2826 <i>n</i>	2,0772 <i>n</i>	2,2234	2,0879	9,958	0,839 <i>n</i>	0,936	0,973
1,95	1,2765 <i>n</i>	2,0795 <i>n</i>	2,2251	2,0914	9,971	0,840 <i>n</i>	0,937	0,976
96	1,2702 <i>n</i>	2,0818 <i>n</i>	2,2268	2,0949	9,984	0,842 <i>n</i>	0,938	0,979
97	1,2639 <i>n</i>	2,0841 <i>n</i>	2,2285	2,0983	9,996	0,844 <i>n</i>	0,939	0,983
98	1,2574 <i>n</i>	2,0864 <i>n</i>	2,2302	2,1017	0,008	0,845 <i>n</i>	0,940	0,986
99	1,2509 <i>n</i>	2,0887 <i>n</i>	2,2319	2,1051	0,020	0,846 <i>n</i>	0,941	0,989
2,00	1,2443 <i>n</i>	2,0910 <i>n</i>	2,2335	2,1085	0,032	0,848 <i>n</i>	0,942	0,992

L'unité est la seconde d'arc.

TABLE II (suite et fin). — EXPRESSION NUMÉRIQUE DES COEFFICIENTS QUI FIGURENT DANS $\Delta_1(e)$:

$$\Delta_1(e) = a_0 A_0 + b_0 B_0 + c_0 C_0 + d_0 D_0 + a'_0 A'_0 + b'_0 B'_0 + c'_0 C'_0 + d'_0 D'_0.$$

q .	$\text{Log } a_0$.	$\text{Log } b_0$.	$\text{Log } c_0$.	$\text{Log } d_0$.	$\text{Log } a'_0$.	$\text{Log } b'_0$.	$\text{Log } c'_0$.	$\text{Log } d'_0$.
2,00	1,2442 <i>n</i>	2,0910 <i>n</i>	2,2335	2,1085	0,032	0,848 <i>n</i>	0,942	0,992
01	1,2374 <i>n</i>	2,0932 <i>n</i>	2,2352	2,1118	0,043	0,850 <i>n</i>	0,944	0,995
02	1,2302 <i>n</i>	2,0954 <i>n</i>	2,2368	2,1151	0,054	0,851 <i>n</i>	0,945	0,998
03	1,2230 <i>n</i>	2,0976 <i>n</i>	2,2384	2,1184	0,065	0,852 <i>n</i>	0,945	1,001
04	1,2156 <i>n</i>	2,0998 <i>n</i>	2,2400	2,1217	0,076	0,853 <i>n</i>	0,946	1,004
2,05	1,2079 <i>n</i>	2,1020 <i>n</i>	2,2416	2,1250	0,086	0,854 <i>n</i>	0,947	1,007
06	1,2000 <i>n</i>	2,1042 <i>n</i>	2,2431	2,1283	0,096	0,855 <i>n</i>	0,948	1,010
07	1,1920 <i>n</i>	2,1063 <i>n</i>	2,2447	2,1315	0,106	0,856 <i>n</i>	0,949	1,013
08	1,1836 <i>n</i>	2,1084 <i>n</i>	2,2462	2,1347	0,116	0,857 <i>n</i>	0,950	1,016
09	1,1749 <i>n</i>	2,1105 <i>n</i>	2,2478	2,1379	0,125	0,859 <i>n</i>	0,951	1,019
2,10	1,1661 <i>n</i>	2,1125 <i>n</i>	2,2493	2,1411	0,135	0,860 <i>n</i>	0,952	1,022
11	1,1572 <i>n</i>	2,1146 <i>n</i>	2,2508	2,1443	0,144	0,861 <i>n</i>	0,952	1,024
12	1,1480 <i>n</i>	2,1166 <i>n</i>	2,2523	2,1475	0,153	0,863 <i>n</i>	0,953	1,027
13	1,1383 <i>n</i>	2,1187 <i>n</i>	2,2538	2,1506	0,161	0,864 <i>n</i>	0,954	1,030
14	1,1284 <i>n</i>	2,1207 <i>n</i>	2,2553	2,1537	0,170	0,865 <i>n</i>	0,955	1,033
2,15	1,1183 <i>n</i>	2,1227 <i>n</i>	2,2568	2,1568	0,179	0,866 <i>n</i>	0,956	1,036
16	1,1079 <i>n</i>	2,1247 <i>n</i>	2,2583	2,1599	0,188	0,867 <i>n</i>	0,957	1,038
17	1,0969 <i>n</i>	2,1267 <i>n</i>	2,2597	2,1630	0,196	0,869 <i>n</i>	0,957	1,041
18	1,0857 <i>n</i>	2,1286 <i>n</i>	2,2612	2,1661	0,204	0,870 <i>n</i>	0,958	1,044
19	1,0741 <i>n</i>	2,1305 <i>n</i>	2,2626	2,1691	0,212	0,871 <i>n</i>	0,959	1,047
2,20	1,0622 <i>n</i>	2,1325 <i>n</i>	2,2640	2,1721	0,219	0,872 <i>n</i>	0,960	1,050
21	1,0496 <i>n</i>	2,1344 <i>n</i>	2,2654	2,1751	0,226	0,873 <i>n</i>	0,960	1,052
22	1,0366 <i>n</i>	2,1363 <i>n</i>	2,2668	2,1781	0,233	0,874 <i>n</i>	0,961	1,055
23	1,0233 <i>n</i>	2,1382 <i>n</i>	2,2682	2,1811	0,241	0,875 <i>n</i>	0,962	1,057
24	1,0095 <i>n</i>	2,1401 <i>n</i>	2,2696	2,1841	0,249	0,876 <i>n</i>	0,962	1,060
2,25	0,9952 <i>n</i>	2,1419 <i>n</i>	2,2709	2,1870	0,257	0,877 <i>n</i>	0,963	1,063
26	0,9800 <i>n</i>	2,1438 <i>n</i>	2,2722	2,1900	0,264	0,878 <i>n</i>	0,964	1,065
27	0,9643 <i>n</i>	2,1456 <i>n</i>	2,2736	2,1929	0,271	0,879 <i>n</i>	0,964	1,068
28	0,9479 <i>n</i>	2,1474 <i>n</i>	2,2749	2,1958	0,278	0,880 <i>n</i>	0,965	1,070
29	0,9310 <i>n</i>	2,1492 <i>n</i>	2,2762	2,1987	0,285	0,881 <i>n</i>	0,965	1,073
2,30	0,9133 <i>n</i>	2,1510 <i>n</i>	2,2775	2,2016	0,291	0,882 <i>n</i>	0,966	1,076
31	0,8943 <i>n</i>	2,1528 <i>n</i>	2,2788	2,2045	0,296	0,883 <i>n</i>	0,967	1,079
32	0,8745 <i>n</i>	2,1545 <i>n</i>	2,2801	2,2074	0,303	0,884 <i>n</i>	0,967	1,081
33	0,8537 <i>n</i>	2,1562 <i>n</i>	2,2814	2,2102	0,309	0,885 <i>n</i>	0,968	1,084
34	0,8319 <i>n</i>	2,1579 <i>n</i>	2,2827	2,2130	0,316	0,886 <i>n</i>	0,968	1,087
2,35	0,8082 <i>n</i>	2,1597 <i>n</i>	2,2839	2,2158	0,323	0,886 <i>n</i>	0,969	1,089
36	0,7839 <i>n</i>	2,1614 <i>n</i>	2,2852	2,2186	0,329	0,887 <i>n</i>	0,969	1,092
37	0,7574 <i>n</i>	2,1631 <i>n</i>	2,2864	2,2214	0,335	0,888 <i>n</i>	0,970	1,094
38	0,7292 <i>n</i>	2,1648 <i>n</i>	2,2877	2,2241	0,341	0,889 <i>n</i>	0,970	1,097
39	0,6990 <i>n</i>	2,1665 <i>n</i>	2,2889	2,2269	0,347	0,890 <i>n</i>	0,971	1,099
2,40	0,6665 <i>n</i>	2,1681 <i>n</i>	2,2901	2,2296	0,353	0,890 <i>n</i>	0,971	1,102
41	0,6304 <i>n</i>	2,1698 <i>n</i>	2,2913	2,2324	0,359	0,891 <i>n</i>	0,972	1,104
42	0,5911 <i>n</i>	2,1714 <i>n</i>	2,2925	2,2351	0,364	0,892 <i>n</i>	0,972	1,107
43	0,5478 <i>n</i>	2,1730 <i>n</i>	2,2937	2,2378	0,370	0,893 <i>n</i>	0,973	1,109
44	0,4997 <i>n</i>	2,1746 <i>n</i>	2,2949	2,2405	0,376	0,894 <i>n</i>	0,973	1,112
2,45	0,4456 <i>n</i>	2,1762 <i>n</i>	2,2960	2,2432	0,381	0,895 <i>n</i>	0,974	1,114
46	0,3838 <i>n</i>	2,1778 <i>n</i>	2,2972	2,2458	0,386	0,896 <i>n</i>	0,974	1,116
47	0,3096 <i>n</i>	2,1794 <i>n</i>	2,2983	2,2484	0,392	0,896 <i>n</i>	0,974	1,118
48	0,2201 <i>n</i>	2,1809 <i>n</i>	2,2994	2,2510	0,397	0,897 <i>n</i>	0,975	1,121
49	0,1072 <i>n</i>	2,1824 <i>n</i>	2,3005	2,2537	0,402	0,898 <i>n</i>	0,975	1,123
2,50	9,9542 <i>n</i>	2,1839 <i>n</i>	2,3016	2,2564	0,407	0,899 <i>n</i>	0,976	1,126

L'unité est la seconde d'arc.

PLANÈTE JUPITER (Équinoxe 1900,0).

TABLE III (voir p. 65). — PERMETTANT DE TRANSFORMER LA LONGITUDE HÉLIOCENTRIQUE DE JUPITER EN SA LONGITUDE DANS L'ORBITE.

$\lambda_1 - N.$				$v.$	$\lambda_1 - N.$			
⁰	⁰	⁰	⁰		⁰	⁰	⁰	⁰
0	90	180	270	0,0	90	180	270	360
1	89	181	269	+ 0,9—	91	179	271	359
2	88	182	268	1,9	92	178	272	358
3	87	183	267	2,8	93	177	273	357
4	86	184	266	3,8	94	176	274	356
5	85	185	265	4,7	95	175	275	355
6	84	186	264	5,6	96	174	276	354
7	83	187	263	6,5	97	173	277	353
8	82	188	262	7,5	98	172	278	352
9	81	189	261	8,4	99	171	279	351
10	80	190	260	9,2	100	170	280	350
11	79	191	259	10,1	101	169	281	349
12	78	192	258	11,0	102	168	282	348
13	77	193	257	11,9	103	167	283	347
14	76	194	256	12,7	104	166	284	346
15	75	195	255	13,5	105	165	285	345
16	74	196	254	14,3	106	164	286	344
17	73	197	253	15,1	107	163	287	343
18	72	198	252	15,9	108	162	288	342
19	71	199	251	16,6	109	161	289	341
20	70	200	250	17,4	110	160	290	340
21	69	201	249	18,1	111	159	291	339
22	68	202	248	18,8	112	158	292	338
23	67	203	247	19,4	113	157	293	337
24	66	204	246	20,1	114	156	294	336
25	65	205	245	20,7	115	155	295	335
26	64	206	244	21,3	116	154	296	334
27	63	207	243	21,9	117	153	297	333
28	62	208	242	22,4	118	152	298	332
29	61	209	241	22,9	119	151	299	331
30	60	210	240	23,4	120	150	300	330
31	59	211	239	23,9	121	149	301	329
32	58	212	238	24,3	122	148	302	328
33	57	213	237	24,7	123	147	303	327
34	56	214	236	25,1	124	146	304	326
35	55	215	235	25,4	125	145	305	325
36	54	216	234	25,7	126	144	306	324
37	53	217	233	26,0	127	143	307	323
38	52	218	232	26,2	128	142	308	322
39	51	219	231	26,4	129	141	309	321
40	50	220	230	26,6	130	140	310	320
41	49	221	229	26,8	131	139	311	319
42	48	222	228	26,9	132	138	312	318
43	47	223	227	27,0	133	137	313	317
44	46	224	226	27,0	134	136	314	316
45	45	225	225	+27,0—	135	135	315	315

Prendre devant v le signe qui est du même côté que l'argument; v a le signe de $\tan(\lambda_1 - N)$.

PLANÈTE JUPITER (Équinoxe 1900,0).

TABLE IV (voir p. 65). — PERMETTANT DE DÉDUIRE L'ANOMALIE MOYENNE ζ_1 DE LA PLANÈTE QUAND ON CONNAIT SON ANOMALIE VRAIE V_1 .

V_1	$\zeta_1 - V_1$	V_1	$\zeta_1 - V_1$	V_1	$\zeta_1 - V_1$	V_1	$\zeta_1 - V_1$
0° 0'	0. 0. 0"	45° 0'	3.49. 3"	90° 0'	5.32. 12"	135° 0'	4. 1. 7"
1 359	5.36	46 314	53. 7	91 269	32.22	136 224	3.56.59
2 358	11.12	47 313	3.57. 7	92 268	32.25	137 223	52.46
3 357	16.48	48 312	4. 1. 3	93 267	32.21	138 222	48.28
4 356	22.24	49 311	4.55	94 266	31.14	139 221	44. 5
5 355	27.58	50 310	8.43	95 265	31.59	140 220	39.39
6 354	33.31	51 309	12.26	96 264	31.38	141 219	35. 9
7 353	39. 5	52 308	16. 4	97 263	31.11	142 218	30.34
8 352	44.39	53 307	19.39	98 262	30.38	143 217	25.54
9 351	50.11	54 306	23.10	99 261	29.59	144 216	21.11
10 350	0.55.43	55 305	26.35	100 260	29.14	145 215	16.24
11 349	1. 1.13	56 304	29.56	101 259	28.22	146 214	11.33
12 348	6.43	57 303	33.14	102 258	27.25	147 213	6.38
13 347	12.11	58 302	36.26	103 257	26.21	148 212	3. 1.39
14 346	17.39	59 301	39.33	104 256	25.11	149 211	2.56.37
15 345	23. 6	60 300	42.35	105 255	23.56	150 210	51.31
16 344	28.31	61 299	45.32	106 254	22.34	151 209	46.22
17 343	33.54	62 298	48.25	107 253	21. 6	152 208	41.10
18 342	39.16	63 297	51.13	108 252	19.32	153 207	35.54
19 341	44.36	64 296	53.55	109 251	17.52	154 206	30.34
20 340	49.54	65 295	56.32	110 250	16. 5	155 205	25.12
21 339	1.55.10	66 294	4.59. 4	111 249	14.13	156 204	19.47
22 338	2. 0.24	67 293	5. 1.32	112 248	12.15	157 203	14.19
23 337	5.37	68 292	3.55	113 247	10.12	158 202	8.47
24 336	10.49	69 291	6.11	114 246	8. 2	159 201	2. 3.13
25 335	15.58	70 290	8.21	115 245	5.46	160 200	1.57.38
26 334	21. 4	71 289	10.27	116 244	3.24	161 199	52. 1
27 333	26. 7	72 288	12.27	117 243	5. 0.57	162 198	46.22
28 332	31. 8	73 287	14.22	118 242	4.58.25	163 197	40.40
29 331	36. 8	74 286	16.11	119 241	55.47	164 196	34.55
30 330	41. 5	75 285	17.55	120 240	53. 2	165 195	29. 9
31 329	45.58	76 284	19.33	121 239	50.11	166 194	23.20
32 328	50.49	77 283	21. 4	122 238	47.15	167 193	17.29
33 327	2.55.37	78 282	22.30	123 237	44.14	168 192	11.37
34 326	3. 0.22	79 281	23.50	124 236	41. 7	169 191	1. 5.44
35 325	5. 4	80 280	25. 5	125 235	37.55	170 190	0.59.50
36 324	9.43	81 279	26.15	126 234	34.38	171 189	53.55
37 323	14.19	82 278	27.19	127 233	31.15	172 188	47.58
38 322	18.52	83 277	28.17	128 232	27.46	173 187	42. 0
39 321	23.21	84 276	29. 8	129 231	24.13	174 186	36. 1
40 320	27.46	85 275	29.53	130 230	20.35	175 185	30. 2
41 319	32. 9	86 274	30.33	131 229	16.51	176 184	24. 2
42 318	36.28	87 273	31. 7	132 228	13. 2	177 183	18. 2
43 317	40.43	88 272	31.35	133 227	9. 8	178 182	12. 1
44 316	44.55	89 271	31.57	134 226	5.10	179 181	6. 1
45 315	3.49. 3	90 270	5.32.12	135 225	4. 1. 7	180 180	0. 0. 0

La quantité $(\zeta_1 - V_1)$ doit être prise $\left\{ \begin{array}{l} \text{avec le signe + si } 180^\circ < V_1 < 360^\circ. \\ \text{avec le signe - si } 0^\circ < V_1 < 180^\circ. \end{array} \right.$

TABLE DES MATIÈRES.

	Pages.
INTRODUCTION	1
PREMIÈRE PARTIE. — <i>Exposé de la méthode</i>	5
1. Expression différentielle de la perturbation.....	5
2. Calcul des composantes S et T.....	8
3. Étude du terme qui dépend de $(de)_1$	10
4. Calcul des intégrales Φ et Ψ	17
5. Séparation du terme en $\frac{1}{\rho_3}$. Évaluation de la partie qui est directement intégrable.....	21
6. Remarques concernant la Table I.....	23
7. Étude du terme N; subdivision de ce terme.....	25
8. Calcul de l'intégrale partielle N_1	26
9. Calcul de l'intégrale partielle N_2	33
10. Calcul de l'intégrale partielle N_3	37
11. Étude de la partie de N_2 qui a été négligée dans le paragraphe 9.....	43
12. Comparaison des résultats approchés fournis par la méthode précédente avec ceux obtenus par les quadratures mécaniques.....	46
DEUXIÈME PARTIE. — <i>Applications numériques relatives aux perturbations dues à l'action de Jupiter</i>	53
1. Tableau des astres choisis.....	53
2. Les éléments des comètes rapportés au plan de Jupiter, pour 1900,0.....	53
3. Calcul des coordonnées héliocentriques de la planète perturbatrice.....	64
4. Calcul du terme $\Delta_1(e)$	69
5. Calcul du terme $\frac{pm_1}{\rho_0}$	72
6. Calcul de N_1	74
7. Calcul de N_2	78
8. Calcul de N_3	82
9. Tableau récapitulatif et calcul de $\Delta(e)$	84
10. Calcul de l'excentricité avant que chaque comète ait subi les perturbations de Jupiter.....	87
TROISIÈME PARTIE. — <i>Conclusions des résultats obtenus par la méthode approchée</i>	91
1. Résultats relatifs au terme $\Delta_1(e)$	91
2. Remarques concernant le terme N_1	94
3. Étude comparative des différents termes et conclusions relatives à la valeur de $\Delta(e)$	96
4. Examen des résultats numériques obtenus.....	98

	Pages.
QUATRIÈME PARTIE. — <i>Recherche particulière et plus complète concernant l'excentricité antérieure des comètes 1844 III, 1863 VI, 1898 VII et 1899 I</i>	101
1. Formules utilisées.....	101
2. Comète 1844 III.....	103
3. Comète 1863 VI.....	106
4. Comète 1898 VII.....	107
5. Comète 1899 I.....	108
CINQUIÈME PARTIE. — <i>Sur l'orbite de la comète 1844 III</i>	111
TABLES NUMÉRIQUES.....	119

Vu et approuvé :

Paris, le 13 mars 1906.

LE DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES,

PAUL APPELL.

Vu et permis d'imprimer :

Paris, le 13 mars 1906.

LE VICE-RECTEUR DE L'ACADÉMIE DE PARIS,

L. LIARD.

SECONDE THÈSE.

PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Principe de la moindre action.

Paris le 13 mars 1906,

Vu et approuvé :

LE DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES,

PAUL APPELL.

Paris, le 13 mars 1906,

Vu et permis d'imprimer :

LE VICE-RECTEUR DE L'ACADÉMIE DE PARIS,

L. LIARD.

PARIS — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS,

38204

Quai des Grands-Augustins, 55.
